

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO  
UTILIZANDO COORDENADAS GENERALIZADAS E  
ESQUEMA DE INTERPOLAÇÃO TVD***

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA

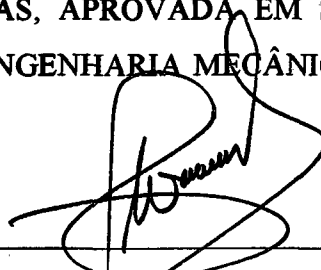
**MARCOS ANTONIO ANDRADE MOTA**

**FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1994**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO UTILIZANDO  
COORDENADAS GENERALIZADAS E ESQUEMA DE INTERPOLAÇÃO TVD**

**MARCOS ANTONIO ANDRADE MOTA**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE **MESTRE EM ENGENHARIA** ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA,  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA  
FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.


**ORIENTADOR**



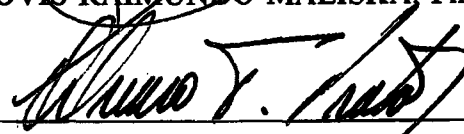
Prof. ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng. Mec.

**COORDENADOR DO CURSO**

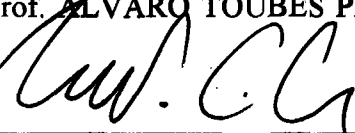
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.



Prof. ALVARO TOUBES PRATA, Ph.D.



Prof. ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng. Mec.



Prof. DANIEL NORBERTO KOZAKEVICH, M.Sc.

***Este trabalho é dedicado a minha família,  
que sempre me deu suporte e apoio.***

## ***A*GRADECIMENTOS**

---

Aos contribuintes brasileiros que através do CNPq financiaram este trabalho.

Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska pela orientação e suporte proporcionados em todos os momentos do trabalho.

Ao amigo Prof. Francisco Marcondes pela valiosíssima orientação informal e estímulo.

Ao mestrando Adalberto R. da Cunha pela sua inestimável colaboração na confecção do código computacional e na geração de malhas.

Ao mestrando Marcos A. do Livramento pela assessoria prestada na utilização de softwares e estações de trabalho.

Ao estagiário do SINMEC Clovis Raimundo Maliska Jr. pela atenção dispensada aos meus pedidos de adaptação em seu programa ISO-3D. Programa por mim utilizado na confecção das isocurvas.

À Prof<sup>a</sup> Renata S. Crespo pelas frutíferas discussões sobre coordenadas generalizadas.

Ao Mestre Axel Dihlmann pela presteza com que sempre me atendeu.

Aos amigos Sillas Oliva Filho, João e Cláudia Carmona, Alexandre B. Costa e Marco Aurélio Dutra Aydos pela convivência e estímulo.

À Giana Rabello pela paciência e estímulo.

Aos colegas da Pós-Graduação e particularmente do SINMEC pelo excelente ambiente de trabalho criado.

Aos professores do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC.

# SUMÁRIO

---

Resumo .....	vii
Abstract .....	viii
Lista de Figuras .....	ix
Lista de Tabelas .....	xi
Simbologia .....	xii
1 - Introdução .....	1
1.1 - Preliminares .....	1
1.2 - Métodos de Recuperação de Petróleo .....	2
1.3 - Estado da Arte em Simulação de Reservatórios .....	3
1.3.1- Breve Histórico .....	4
1.3.2 - Modelos .....	4
1.3.3 - Métodos Numéricos .....	5
1.3.4 - Efeito de Orientação de Malha .....	6
1.4 - Objetivos e Organização do Trabalho .....	11
2 - Formulação do Problema .....	13
2.1 - Introdução .....	13
2.2 - Conservação da Massa dos Componentes .....	13
2.3 - Equação da Quantidade de Movimento para cada Fase .....	15
2.4 - Formulação "Black-Oil" .....	17
3 - Método de Solução .....	22
3.1 - Introdução .....	22
3.2 - Caso Unidimensional .....	22
3.3 - Método IMPES .....	24
3.4 - Linearização do Termo Fonte da Pressão .....	25
3.5 - Algoritmo de Solução do Método IMPES .....	26
3.6 - Caso Bidimensional em Coordenadas Curvilíneas .....	27
4 - TVD nas Permeabilidades Relativas e Modelo de Poço .....	33
4.1 - Preliminares .....	33

4.2 - Esquema TVD Explícito .....	33
4.3 - Esquema TVD em Coordenadas Generalizadas .....	36
4.4 - Esquema TVD nas Permeabilidades Relativas .....	40
4.5 - Modelo de Poço Cartesiano .....	41
4.6 - Modelo de Poço em Coordenadas Generalizadas .....	43
4.7 - Condição de Contorno dos Poços .....	47
5 - Resultados e Discussões .....	50
5. 2 - Grupo A - Validações .....	50
5.1 - Preliminares .....	50
5.2.1 - Caso 1 - Malhas Cartesianas - $M=1$ .....	51
5.2.2 - Caso 2 - Malhas Generalizadas - $M > 1$ .....	54
5.3 - Grupo B - Comparações - TVD x Upwind .....	58
5.3.1- Malha Cartesiana .....	58
5.3.2 - Malha Generalizada .....	62
5.3.3 - Deslocamento Tipo Pistão .....	65
5.4 - Grupo C - Geometria Irregular .....	70
5.4.1. Grupo C - Caso 1 - Geometria Irregular com Falha Geol .....	70
5.4.2. Grupo C - Caso 2 - Geometria Irregular sem Falha Geol .....	81
6 - Conclusões .....	88
Referências Bibliográficas .....	90
Apêndice A .....	96

## **RESUMO**

---

*Este trabalho estuda o esquema TVD (Total Variation Diminishing) de Rubin e Blunt para sistemas de coordenadas generalizadas. Esta interpolação é aplicada nos termos de fluxo das equações de conservação, entretanto para os casos resolvidos esta metodologia é aplicada no cálculo das permeabilidades relativas nas faces do volume de controle. O modelo utilizado é o "black-oil" bifásico (água e óleo) com formulação IMPES, sendo suas equações resolvidas via volumes finitos. Os resultados numéricos apresentados demonstram a eficiência do esquema TVD em coordenadas generalizadas na redução da dispersão numérica.*

## ABSTRACT

---

*This work extends the TVD scheme of Rubin and Blunt to curvilinear coordinate system. The TVD is applied in the fluxes of the conservative equations. In the presented cases the approximation is applied for representing the relative permeability at the control volume interfaces. The IMPES black-oil equations are solved via finite volume method. Numerical results show the increase accuracy resulting from the use of the curvilinear TVD.*



## *LISTA DE FIGURAS*

---

Figura 1 - Amostra de rocha porosa .....	1
Figura 2 - Esquema de recuperação secundária .....	2
Figura 3 - Formação de "Dedo" .....	3
Figura 4 - Subdivisões na simulação de reservatórios .....	4
Figura 5 - Configuração "Five-Spot" .....	6
Figura 6 - Malhas Diagonal e Paralela - Configuração "five-spot" .....	7
Figura 7 - Fluxos de Massa através do Volume de Controle .....	13
Figura 8 - Princípio da Conservação de Massa aplicado ao VC .....	14
Figura 9 - Curvas de permeabilidades relativas .....	17
Figura 10 - Volume de controle unidimensional .....	23
Figura 11 - Transformação para coordenadas generalizadas .....	27
Figura 12 - Região TVD de um limitador de segunda ordem .....	35
Figura 13 - Distâncias nas direções $\xi$ e $\eta$ .....	37
Figura 14 - Fluxo radial em volta de um poço .....	42
Figura 15 - Distâncias radiais .....	45
Figura 16 - Validação de casos cartesianos com malha 10x10 e $M=1$ .....	53
Figura 17 - (a) Malha "curvilínea" de Voronoi. (b) Malha generalizada 20x20 .....	56
Figura 18 - Validação de casos com malhas generalizadas, $M>1$ e interpol. upwind .....	57
Figura 19 - Isocurvas de saturação em $VPI=0,2$ .....	58
Figura 20 - Comparação entre métodos de interpolação, malha cartesiana e $M=1$ . .....	59
Figura 21 - Comparação entre métodos de interpolação, malha cartesiana e $M=10$ . .....	60
Figura 22 - Comparação entre métodos de interpolação, malha cartesiana e $M=50$ . .....	60
Figura 23 - Isocurvas de saturação em $VPI = 0,2$ - malha cartesiana .....	61
Figura 24 - Malhas generalizadas, configuração "five-spot" .....	62
Figura 25 - Comparação entre métodos de interpolação, malha generalizada e $M=1$ . .....	63
Figura 26 - Comparação entre métodos de interpolação, malha generalizada e $M=10$ . ....	63
Figura 27 - Comparação entre métodos de interpolação, malha generalizada e $M=50$ . ....	64

Figura 28 - Isolinhas de saturação em $VPI = 0,2$ , malha generalizada. ....	65
Figura 29 - Curvas de fluxo fracionário. ....	66
Figura 30 - Isolinhas de saturação em $VPI = 0,2$ , tipo pistão ( $f_w = S_w^2$ ) e $M=1$ . ....	68
Figura 31 - Isolinhas de saturação em $VPI = 0,2$ , tipo pistão ( $f_w = S_w^2$ ) e $M=10$ . ....	69
Figura 32 - Contorno do reservatório e localização dos poços ....	71
Figura 33 - Malhas 19x10 e 50x19 - Contorno irregular ....	73
Figura 34 - Poço 1 - Reservatório com falha ....	74
Figura 35 - Poço 2 - Reservatório com falha ....	75
Figura 36 - Poço 3 - Reservatório com falha ....	75
Figura 37 - Poço 4 - Reservatório com falha ....	76
Figura 38 - Poço 5 - Reservatório com falha ....	76
Figura 39 - Poço 6 - Reservatório com falha ....	77
Figura 40 - Produção total - Reservatório com falha ....	78
Figura 41 - Corte de água - Reservatório com falha ....	79
Figura 42 - Pressão de fundo de poço - Reservatório com falha ....	79
Figura 43 - Isocurvas de saturação em $VPI=0,2$ , reservatório com falha ....	80
Figura 44 - Isocurvas de pressão em $VPI=0,2$ , reservatório com falha ....	80
Figura 45 - Poço 1 - Reservatório sem falha ....	81
Figura 46 - Poço 2 - Reservatório sem falha ....	82
Figura 47 - Poço 3 - Reservatório sem falha ....	82
Figura 48 - Poço 4 - Reservatório sem falha ....	83
Figura 49 - Poço 5 - Reservatório sem falha ....	83
Figura 50 - Poço 6 - Reservatório sem falha ....	84
Figura 51 - Produção total - Reservatório sem falha ....	84
Figura 52 - Campo de saturação em $VPI = 0,2$ - Reservatório sem falha ....	85
Figura 53 - Campo de pressão em $VPI=0,2$ - Reservatório sem falha ....	85
Figura 54 - Corte de água - Reservatório sem falha ....	86
Figura 55 - Pressão de fundo de poço - Reservatório sem falha ....	87
Figura 56 - Esquema de indexação de falhas geológicas ....	97

## ***LISTA DE TABELAS***

---

Tabela I - Curvas de Permeabilidades .....	51
Tabela II - Dados Complementares - Grupo A - Caso 1 .....	52
Tabela III - Comparação de tempos de irrupção e fechamento do poço .....	54
Tabela IV - Dados Complementares - Grupo A - Caso 2 .....	55
Tabela V - Tempos de CPU .....	62
Tabela VI - Coordenadas e Vazões Iniciais dos Poços .....	72
Tabela VII - Dados Complementares - Grupo C .....	73

## ***SIMBOLOGIA***

---

A	Área transversal
B	Volume de formação
c	Compressibilidade
D	Coeficiente de dispersão
K	Permeabilidade absoluta
$k_r$	Permeabilidade relativa
m	Massa
M	Razão de viscosidades
p	Pressão
q	Vazão de injeção ou produção
R	Solubilidade
S	Saturação
t	Tempo
V	Volume
VPI	Volume poroso deslocável injetado
VPOR	Volume poroso de óleo recuperável
y	Fração mássica
Z	Profundidade

### **Subscritos**

x , y	Derivadas de primeira ordem
$\eta$ , $\xi$	Derivadas de primeira ordem
w	Fase água
o	Fase óleo
c	Componente
p	Fase

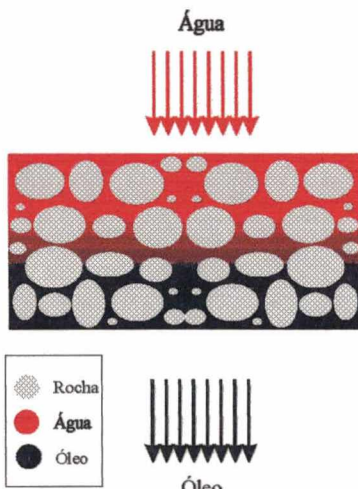
**Letras Gregas**

$\gamma$	Peso específico
$\eta, \xi$	Direções do sistema transformado
$\lambda$	mobilidade
$\mu$	Viscosidade
$\rho$	Densidade
$\phi$	Porosidade
$\Psi$	Limitador do TVD

# INTRODUÇÃO

## 1.1 - Preliminares

Um reservatório de petróleo é caracterizado pela presença de hidrocarbonetos e água, confinados em uma rocha, usualmente localizada a profundidades que dificultam sua medição e



**Figura 1** - Amostra de rocha porosa

caracterização. Esta rocha contém microscópicos poros ligados entre si que ocupam até 30% do volume total do reservatório. O espaço disponível na rocha é ocupado pelo óleo, gás, água e por possíveis fluidos injetados, conforme Fig. 1. Os caminhos formados pelas ligações entre os poros são muito estreitos, altamente irregulares e tortuosos e, como consequência, os fluidos residentes escoam bem lentamente, em geral, menos de um metro por dia.

Também são observados vários efeitos, a nível macroscópico e microscópico, que inibem o escoamento num reservatório de petróleo. Pode-se citar como exemplos, o efeito da capilaridade e da

heterogeneidade do meio poroso (formação rochosa). Com o objetivo de diminuir estes fenômenos inibidores foram criadas tecnologias cada vez mais sofisticadas que facilitam a produção de óleo. Porém o aumento da sofisticação trouxe consigo um aumento nos custos, materiais e de operação, e uma grande demanda por processos preditivos.

Estes processos preditivos têm como objetivo responder questões cruciais na produção de petróleo, tais como, vida útil do reservatório, capacidade de produção, pressões necessárias nos poços produtores e injetores e as localizações ótimas destes poços. Devido às dificuldades técnicas e aos custos associados à realização de experimentos que respondam estas questões de forma confiável, a simulação numérica de reservatórios de petróleo surge como uma ferramenta indispensável ao engenheiro de petróleo. Utilizando a simulação numérica em conjunto com uma boa caracterização do sistema fluido-rocha a ser modelado, pode-se testar várias estratégias de

operação e comparar o desempenho de projetos já em operação. [01]

Para que se possa entender a complexidade do desenvolvimento de um modelo físico que reproduza bem os fenômenos envolvidos na recuperação de petróleo será feita uma breve discussão sobre alguns tipos de recuperação. [02].

## 1.2 - Métodos de Recuperação de Petróleo

Apesar dos fenômenos de inibição citados anteriormente, uma variedade de fontes naturais de energia facilitam a produção de óleo. Um dos mecanismos naturais que promovem a produção é a expansão de gás livre presente em capas sobre o óleo. A redução de pressão, que acompanha a produção de óleo, provoca esta expansão e desloca o óleo em direção ao poço produtor. Quando estas fontes de energia permitem a produção apenas através de bombeamento, sem injeção de outros fluidos, diz-se que o reservatório está sob produção primária. Este tipo de recuperação é chamada *Recuperação Primária*, e normalmente deixa de 70 a 85% de óleo no reservatório.

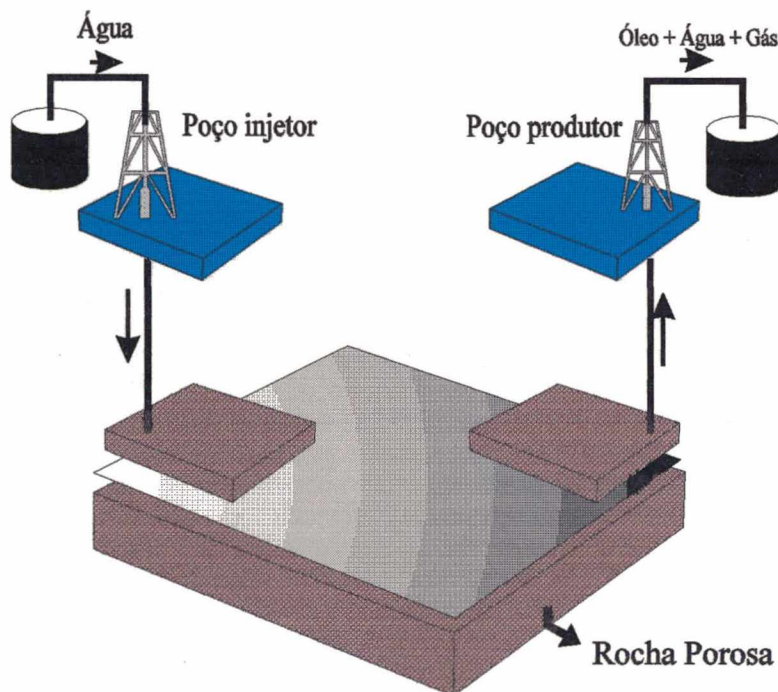
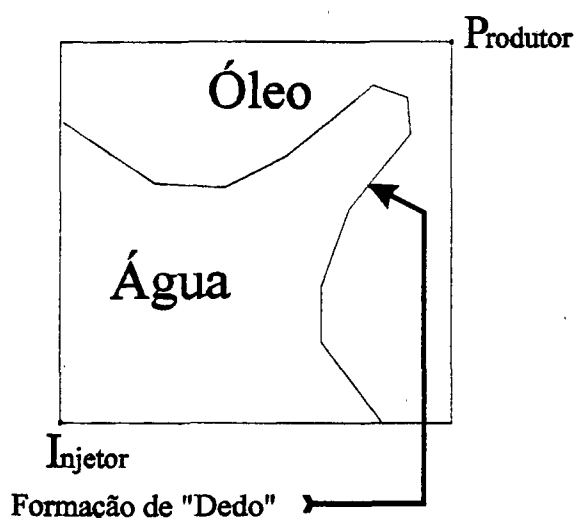


Figura 2 - Esquema de recuperação secundária

Após a recuperação primária, um fluido, como a água, pode ser injetado no reservatório através de alguns poços, enquanto outros produzem o óleo deslocado pela água. A injeção de fluido serve a dois propósitos, manter altas a pressão do reservatório e as vazões de produção e inundar os poros, "empurrando" o óleo para fora através de um deslocamento imiscível em direção aos poços produtores. O processo acima descrito está ilustrado na Fig. 2 e é chamado de **Recuperação Secundária**.

Devido a efeitos de tensões superficiais grandes quantidades de óleo ficam presas nos poros e, além disso, o processo de empurrar um óleo altamente viscoso utilizando um fluido menos viscoso é instável. Esta instabilidade pode provocar o aparecimento de longos "dedos",



ilustrados na Fig. 3, que crescem na direção do poço produtor. Quando estes dedos atingem o poço forma-se um canal por onde o fluido que tem viscosidade menor flui mais facilmente. Deste modo são formados canais preferenciais de escoamento e o fluido injetado desloca uma quantidade menor de óleo, diminuindo sensivelmente sua produção. Normalmente 50% do óleo é deixado no reservatório após a recuperação secundária.

Na tentativa de evitar o aparecimento indesejável de "dedos" durante a recuperação e aumentar a quantidade de óleo produzido, foram

**Figura 3 - Formação de "Dedo"**

desenvolvidas outras técnicas, chamadas de **Recuperação Avançada ou Terciária**. Estas técnicas envolvem processos térmicos ou químicos. Os métodos térmicos tem como objetivo a diminuição da viscosidade do óleo através de aquecimento do reservatório. Isto é conseguido através de injeção de vapor d'água, combustão "in situ" ou mesmo aplicando-se uma corrente elétrica. Os métodos químicos comumente objetivam diminuir a formação de "dedos" através do aumento da viscosidade da água injetada. Este aumento na produção pode ser conseguido pela adição de polímeros ou através da diminuição da tensão interfacial existente entre a água injetada e o óleo residente.



### 1.3 - Estado da Arte em Simulação de Reservatórios

A seguir serão abordados vários aspectos ligados à simulação de reservatórios, tais como, a história do seu desenvolvimento, modelos matemáticos utilizados, técnicas de solução das equações diferenciais que compõem o modelo matemático e problemas mais comuns enfrentados pelos métodos numéricos tradicionalmente utilizados. Uma discussão mais detalhada do nível de desenvolvimento da simulação de reservatório pode ser encontrada em Coats [03].

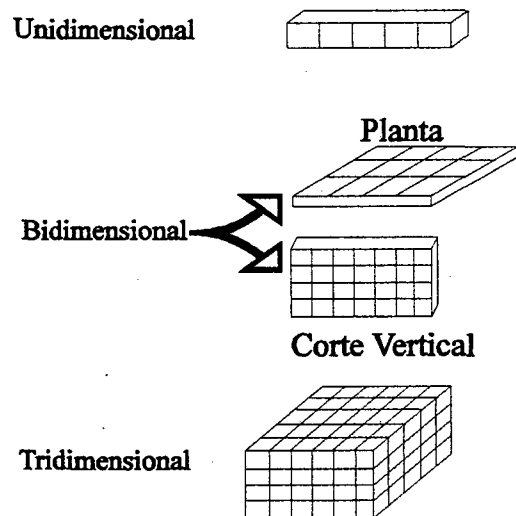
#### 1.3.1 - Breve Histórico

Num sentido mais amplo, a simulação de reservatórios tem sido praticada desde o início da engenharia de petróleo na década de 30. Antes de 1960 a simulação de reservatórios era exclusivamente feita através de métodos analíticos [4,5], balanços materiais descritos para cada fase [6,7] e solução da equação de Buckley e Leverett para o caso unidimensional bifásico [8,9].

A partir de 1960 apareceram os primeiros simuladores bifásicos e bidimensionais,

permitindo a solução de grandes sistemas de equações em diferenças finitas. A Fig. 4 ilustra as subdivisões dos simuladores de reservatório propostas por Odeh [10] em 1969.

A partir da década de 70 foram verificados avanços significativos na formulação de modelos e métodos de solução numéricos. Estes avanços permitiram simular processos de recuperação mais complexos e a redução dos custos computacionais, através da eficiência dos métodos de solução e do aumento da qualidade e velocidade dos computadores.



**Figura 4** - Subdivisões na simulação de reservatórios

### 1.3.2 - Modelos

Dentre os vários tipos de modelos de simulação de reservatórios de petróleo, os mais utilizados são o modelo black-oil e o modelo composicional.

O *modelo composicional* representa reservatórios onde existe óleo volátil, deslocamentos miscíveis, e qualquer processo que considere que o hidrocarboneto tenha  $n$  componentes, em vez de apenas óleo. Por exemplo, a fase óleo pode ser constituída por dois componentes, quais sejam: gás metano dissolvido e um óleo pesado de cadeia longa.

No *modelo black-oil* ou *modelo beta* assume-se escoamento isotérmico, com três fases imiscíveis: água, óleo e gás, com a solubilidade do gás dependendo apenas da pressão. Esta representação do hidrocarboneto por dois componentes (gás e óleo) presume composições constantes (independentemente da pressão) das fases óleo e gás, nenhuma volatilidade do óleo na fase gás, e solubilidade nula do gás e do óleo na água.

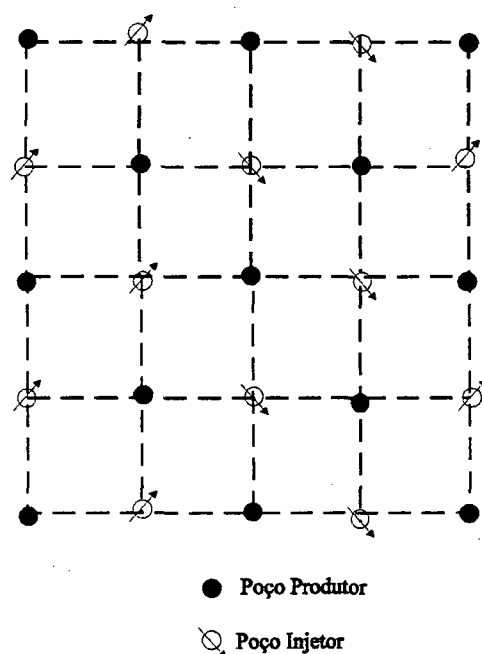
O modelo "black-oil" é o mais utilizado dos modelos, entretanto ele é empírico e sua aplicação é limitada à simulação de processos de recuperação primária e secundária. Já o modelo composicional é mais completo, mas seu grande custo computacional limita sua aplicação à simulação de processos de recuperação avançados.

### 1.3.3 - Métodos Numéricos

Historicamente o método de diferenças finitas sempre foi mais empregado na solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor. Na simulação de reservatórios o método de diferenças finitas ainda é muito utilizado com malhas cartesianas e esquemas de cinco pontos, ou seja, a equação de balanço para cada ponto contabiliza apenas as contribuições dos quatro pontos vizinhos situados na vertical e horizontal. As vantagens deste método são: a simplicidade de realização de balanços de massa, energia, etc; e a facilidade de solução do sistema de equações gerados pelo esquema de cinco pontos. Contudo, o uso de malhas cartesianas apresenta problemas na caracterização de reservatórios que possuem geometrias irregulares, falhas geológicas e regiões heterogêneas. Além disso, o seu uso provoca o aparecimento do efeito de orientação de malha, semelhante ao efeito conhecido em mecânica dos fluidos como difusão numérica, denominado na área de petróleo de dispersão numérica.

### 1.3.4 - Efeito de Orientação de Malha

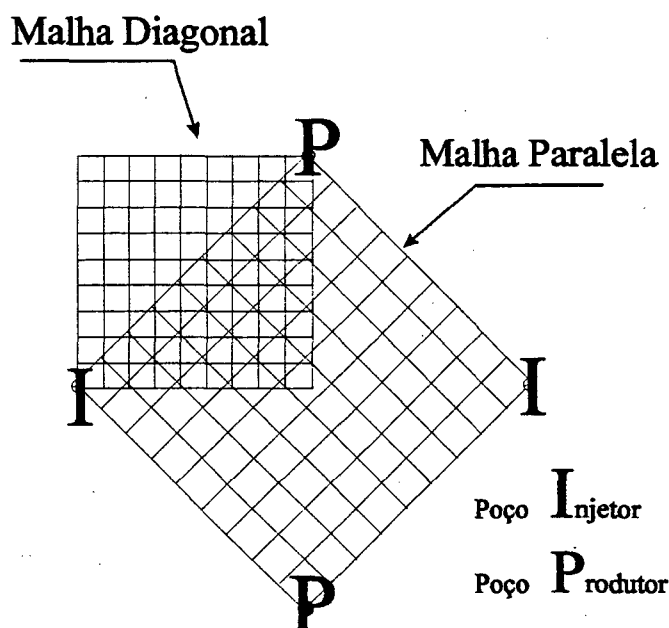
O efeito de orientação de malha em esquemas cinco pontos e malhas cartesianas foi demonstrado por Todd et al [11]. Eles utilizaram uma configuração de poços chamada "five-spot" (cinco poços), ou seja, configuração formada por quatro poços injetores em cada face de um quadrado e um poço produtor no centro, conforme mostra a Fig. 5. Esta configuração foi resolvida utilizando duas malhas cartesianas ilustradas na Fig. 6.



**Figura 5 - Configuração "Five-Spot"**

A malha diagonal representa um quarto de "five-spot", com as linhas da malha a 45° da linha que conecta o poço injetor ao poço produtor. A malha paralela representa metade de "five-spot", com linhas da malha ou paralelas ou perpendiculares à linha que conecta o par de poços produtor-injetor. Todd et al demonstraram que os resultados dependem do sistema de malha utilizado e que a diferença entre os resultados decresce com o aumento do número de pontos da malha. Como alternativa para o aumento do número de pontos eles propuseram o uso de um esquema de segunda ordem (dois pontos a montante) na avaliação das propriedades nas interfaces dos blocos.

Coats et al [12] demonstraram a existência do efeito de orientação de malha em deslocamentos desfavoráveis. Estes deslocamentos são caracterizados pela alta razão de



**Figura 6** - Malhas Diagonal e Paralela - Configuração "five-spot"

viscosidades entre o fluido deslocado e deslocante e são encontrados com grande frequência. No problema de injeção de vapor simulado em [12], observou-se que mesmo aumentando o número de pontos, o efeito de orientação de malha não se alterava.

Brand et al [13] demonstraram que para deslocamentos desfavoráveis, em geometrias "five-spot", o efeito de orientação de malha não pode ser eliminado com o refinamento da malha, chegando em certos escoamentos, como é o caso do escoamento tipo pistão, a aumentar os erros numéricos.

Yanosik e McCracken [14] observaram que o efeito de orientação de malha provavelmente era causado pela não contabilização do fluxo entre o volume onde se está calculando e seu vizinho na diagonal. Eles então introduziram um esquema de nove pontos que contabilizava este fluxo. Foram mostrados resultados, para várias razões de viscosidades, praticamente idênticos quando se utilizou malhas diagonais e paralelas. A diferença máxima obtida nas curvas de recuperação foi no máximo de 1,5%.

Hirasaki e O'Dell [15]; Sonier e Chaumet [16]; Robertson e Woo [17], todos na década de 70, investigaram uso de coordenadas curvilíneas ortogonais. Este método tem como principais vantagens a redução do efeito de orientação de malha e a melhoria na simulação de geometrias complexas com falhas geológicas e zonas de permeabilidades heterogêneas. Entretanto, deve-se assinalar que a redução do efeito de orientação de malha só é conseguido quando há alinhamento

entre as linhas coordenadas e a direção do fluxo. Robertson e Woo compararam resultados obtidos utilizando malhas curvilíneas ortogonais e malhas cartesianas em configurações "five-spot" paralelas e diagonais. Os resultados obtidos demonstram que o efeito de orientação de malha é bastante reduzido quando se utiliza coordenadas curvilíneas, sendo este efeito mais pronunciado na frente de saturação do que nas curvas de recuperação de óleo.

Embora a utilização de malhas em coordenadas curvilíneas ortogonais, em conjunto com um bom alinhamento das linhas coordenadas, contribua para redução do efeito de orientação de malha, o seu uso em geometrias tridimensionais é restrito. Esta limitação levou os pesquisadores a utilizarem coordenadas curvilíneas não-ortogonais ou coordenadas generalizadas.

Em 1991 Britto et al [18] investigando o uso de coordenadas curvilíneas não-ortogonais em geometrias arbitrárias, falhas geológicas e zonas com diferentes permeabilidades, demonstraram que para os casos estudados o simulador utilizando malha cartesiana, necessitou de quatro vezes mais pontos que o simulador com malha em coordenadas generalizadas, para se obter a mesma solução.

Maliska et al [19], em 1993, e Cunha et al [20], em 1994, utilizaram uma configuração "five-spot" com malha em coordenadas generalizadas e obtiveram resultados que se aproximam muito daqueles obtidos por Yanosik e McCracken [14] para malha cartesiana com esquema de nove pontos.

### 1.3.5 - Metodologia de Solução das Equações Diferenciais

A simulação de escoamentos multifásicos requer técnicas de solução de equações não-lineares acopladas. Dentre as técnicas existentes as mais "populares" são: a formulação implícita e a formulação IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation). Sheldon et al [21], Stone et al [22] e Fagin et al [23] descreveram o IMPES para o modelo "black-oil" e mais tarde Coats [24] fez a extensão para o caso em que existam "n" componentes. A idéia básica do método IMPES é obter uma equação para a pressão combinando as equações de fluxo. Deste modo a equação da pressão é avançada no tempo implicitamente e a da saturação é atualizada explicitamente.

O método totalmente implícito foi formulado pela primeira vez por Blair e Weinaug [25]. Esta formulação requer a solução de todas as equações simultaneamente e sua implementação no modelo "black-oil" foi descrita por Coats [26].

O IMPES tem algumas vantagens sobre o método implícito, como a facilidade de implementação, esforço computacional menor, pois apenas uma equação é resolvida implicitamente, e maior precisão da solução. Entretanto a formulação IMPES pode se tornar instável se o passo de tempo for muito grande, o que não acontece quando se utiliza a formulação totalmente implícita.

### 1.3.6 - Dispersão Numérica (Difusão Numérica)

Em simulação de reservatórios os modelos normalmente avaliam as propriedades nas faces através de esquemas de 1ª ordem, sendo o mais utilizado deles o esquema de um ponto a montante. Vários autores, dentre eles Todd et al [11], Y Ito [27] e Taggart e Pinczewski [28], demonstraram que o uso destes esquemas introduzem níveis inaceitáveis de dispersão numérica. Em processos de recuperação secundária, onde se tem uma frente formada na interface dos fluidos deslocados e injetados, a dispersão numérica prevê a irrupção prematura do fluido deslocante e, em certos casos, a irrupção é antecipada em quase um ano. A dispersão numérica pode ser eliminada através do refinamento da malha, entretanto, um aumento do número de pontos com o intuito de reduzir este efeito pode ser computacionalmente proibitivo.

Vários esquemas de ordem superior incluindo o esquema tipo Godunov [29,30], FCT (Flux Corrected Transport) [31] foram sugeridos para diminuir a dispersão numérica em equações hiperbólicas. Estes esquemas exigem que a porção parabólica e hiperbólica das equações "black-oil" estejam separadas e sejam resolvidas sequencialmente. Isto normalmente requer um grande esforço para introduzir tais esquemas nos códigos com formulação implícita e IMPES.

Como forma de se produzir soluções com pouca dispersão numérica, sem no entanto provocar as oscilações espúrias comumente observadas em esquemas de segunda ordem, Harten et al [32] introduziram, no início da década de 80, o conceito de métodos TVD ("Total Variation Diminishing") para equações hiperbólicas em coordenadas cartesianas. Estes métodos basicamente introduzem um termo de fluxo anti-difusivo ao esquema de um ponto a montante. Um limitador restringe este fluxo de tal forma que o esquema seja de segunda ordem em regiões suaves e de primeira ordem em regiões de descontinuidade. Harten et al e Sweby [33] demonstraram os critérios que devem ser obedecidos pelo limitador para que se tenha um esquema TVD. Na literatura existem vários limitadores, os mais conhecidos são os limitadores de Sweby [33], Van Leer [34] e de terceira ordem [35]. Em 1986 Yee e Harten [36] fizeram a extensão para

coordenadas curvilíneas ortogonais do TVD apresentado por Harten et al [32] .

Rubin e Blunt [37] introduziram em 1990 um esquema TVD nos fluxos baseados em gradientes de pressão das equações do modelo "black-oil" em coordenadas cartesianas. O método proposto é derivado do TVD com limitador de fluxo de Sweby, só que neste caso, reduz-se a resolução do termo temporal para primeira ordem e mantém-se o esquema de segunda ordem no espaço. Nos resultados apresentados por Rubin e Blunt, o esquema TVD utilizando malha 30x30 produziu resultados superiores, com tempo de CPU quatro vezes inferior, quando comparados aos obtidos com esquema upwind e malha 80x80. Embora os resultados apresentados por Rubin e Blunt tenham sido excelentes, os casos resolvidos por eles foram simples e particulares.

Em 1991 Pinto [38], em sua dissertação de mestrado, fez a extensão do esquema TVD para malhas cartesianas não-uniformes e utilizou o TVD no cálculo das permeabilidades relativas nas faces. Analisando o desempenho do método TVD em três formulações (IMPES, semi-implícita e implícita) ficou demonstrado que existe pouca diferença em aplicar o TVD na avaliação das permeabilidades relativas nas faces ou nos termos de fluxo. Pinto também demonstrou que a utilização do esquema TVD praticamente elimina o efeito de orientação de malha.

### 1.3.7 - Modelo de Poço

Inevitavelmente quando se faz a simulação numérica, a área do bloco que contém o poço é muito maior que área do poço. Portanto, a pressão calculada neste bloco não representa a pressão no poço. A grande importância de se calcular corretamente a pressão no poço, reside no fato de que as vazões nos poços são calculadas via gradientes de pressão. Neste sentido, a utilização de uma expressão que acople a pressão do volume calculado numericamente à pressão do poço se faz necessário. Tais expressões são denominadas modelo de poço.

Em 1967 Schwabe e Brand [39] propuseram uma relação que admite um perfil logarítmico para a queda de pressão na região próxima ao poço. Esta relação é encontrada através da solução analítica da equação para escoamento radial, monofásico e em regime permanente.

van Poolen et al [40] supuseram que a pressão calculada para o bloco do poço fosse igual a pressão média na área do bloco contendo o poço. Mais tarde Peaceman [41] mostrou que esta hipótese não é correta, e assumindo distribuição radial da pressão ao redor do poço em regime permanente, definiu um raio equivalente de poço. Este raio equivalente depende da

geometria do bloco, da localização do poço no bloco e do esquema de discretização espacial.

Peaceman [42] fez a extensão do cálculo do raio equivalente de poço para o caso em que o bloco não é quadrado e quando se tem anisotropia na permeabilidade. Um tratamento mais geral para o modelo de poço foi apresentado por Abou-Kassem e Aziz [43], as equações apresentadas por eles podem ser usadas para malhas com bloco centrado e ponto distribuído com formulações cinco ou nove pontos.

Cunha e Maliska [44] propuseram o cálculo do raio equivalente de poço para coordenadas curvilíneas não-ortogonais eliminando os termos de fluxo cruzado.

## 1.4 - Objetivos e Organização do Trabalho

Na bibliografia consultada observou-se que existem poucos trabalhos em simulação de reservatórios utilizando coordenadas generalizadas, indicando ser este um assunto de pesquisa de vanguarda. Detectou-se também duas lacunas; a primeira delas é a inexistência de um esquema TVD, semelhante ao proposto por Rubin e Blunt, que possa ser utilizado para este tipo de discretização e a segunda é a falta de uma expressão completa para o cálculo do raio equivalente de poço.

Este trabalho tem como objetivos:

- ( i ) - fazer um estudo da simulação de reservatórios de petróleo sob a ótica da Mecânica do Fluidos. Para tanto são cuidadosamente explicados os fenômenos físicos mais importantes na engenharia de petróleo; e demonstradas todas as equações do modelo "black-oil";
- ( ii ) - contribuir para o preenchimento das "lacunas" citadas anteriormente.

A seguir é apresentado um resumo do conteúdo dos capítulos que formam o restante deste texto.

### Capítulo Dois - Formulação do Problema

Neste capítulo são apresentadas as equações que governam o problema físico e suas condições de contorno. Estas equações representam o modelo "black-oil" e estão sob a forma de um sistema de equações diferenciais não-lineares.



**Capítulo Três - Método de Solução**

Este capítulo traz a discretização das equações via volumes finitos. Também é discutido como são tratadas as não-linearidades das equações e os passos básicos do método IMPES.

**Capítulo Quatro - TVD nas Permeabilidades Relativas e Modelo de Poço**

Este capítulo é reservado para a exposição dos tópicos que são contribuições deste trabalho. Nele são mostradas a extensão do TVD de Rubin e Blunt para coordenadas generalizadas, o cálculo do raio equivalente de poço para coordenadas curvilíneas não-ortogonais e como são calculadas as condições de contorno para os poços.

**Capítulo Cinco - Resultados e Discussões**

Neste capítulo são mostradas casos que validam o procedimento numérico utilizado e os resultados e comparações feitas utilizando a metodologia proposta no Capítulo Quatro e a disponível na bibliografia.

**Capítulo Seis - Conclusões**

São apresentadas neste capítulo as conclusões finais deste trabalho.

## CAPÍTULO DOIS

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

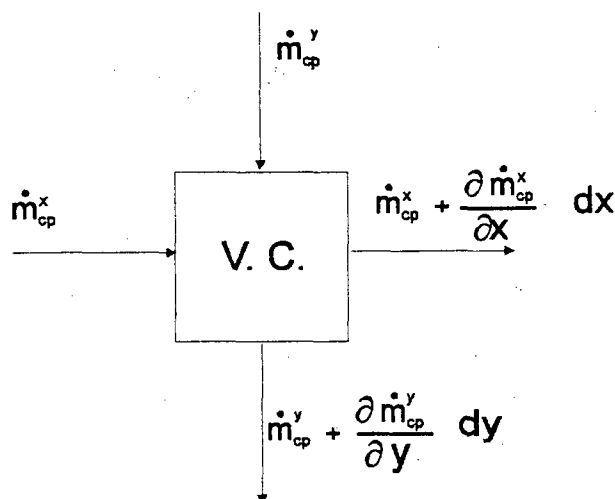
---

#### 2.1 - Introdução

Neste capítulo apresentar-se-á, inicialmente, a dedução das equações de conservação para escoamentos bidimensionais multifásicos. Em seguida, algumas simplificações são adotadas e através de alguma manipulação matemática, obtém-se um sistema de equações diferenciais que representam o modelo "black-oil" bifásico (água e óleo) e isotérmico.

As equações usadas para modelar o escoamento isotérmico em reservatórios são obtidas combinando a Equação da Conservação da Massa com a Lei de Darcy. Estas equações juntamente com suas restrições, relações constitutivas, e condições iniciais e de contorno, conduzem a um sistema matematicamente bem posto que será resolvido através de técnicas numéricas mostradas no Capítulo Três.

#### 2.2 - Conservação da Massa dos Componentes



**Figura 7** - Fluxos de Massa através do Volume de Controle

Devido a presença na rocha porosa de óleo, gás e água separados por interfaces microscópicas, pode-se dizer que se tem uma mistura multifásica e multicomponente no modelamento de reservatórios. É conveniente diferenciar os componentes das fases fazendo o seguinte raciocínio: componentes correspondem às moléculas químicas, enquanto as fases são misturas homogêneas destas moléculas separadas de outras fases por uma interface fluida.

Considere-se um sistema com  $n_c$  componentes ( $c$  é o índice do componente) e  $n_p$  fases ( $p$  é o índice da fase). A Fig. 7 ilustra

os fluxos de massa destes componentes em um volume de controle (VC) bidimensional com área transversal  $A$ .

O fluxo de massa do componente  $c$  na fase  $p$  pode ser expresso como,

$$\dot{m}_{cp} = ( y_{cp} \rho_p \vec{u}_p + D_{cp} \vec{\nabla} y_{cp} ) A \quad (1)$$

onde  $y_{cp}$  é a fração mássica do componente  $c$  na fase  $p$ , ou seja, é a razão entre a massa do componente  $c$  presente na fase  $p$  e massa total da fase  $p$ .  $\rho_p$  é a densidade da fase  $p$ ,  $\vec{u}_p$  é a velocidade da fase  $p$  e  $D_{cp}$  o coeficiente de dispersão do componente  $c$  na fase  $p$ .

O primeiro termo da Eq. (1) descreve o transporte convectivo de fluido através do meio poroso e o segundo expressa o efeito combinado da transferência de massa por dispersão e a difusão molecular. O coeficiente de dispersão é afetado pela porosidade, tortuosidade, distribuição do tamanho dos poros, heterogeneidade e velocidade do fluido. O transporte difusivo-dispersivo tem papel muito importante na reciclagem de gás em reservatórios condensados e em processos envolvendo deslocamentos miscíveis. No presente trabalho tem-se deslocamento imiscível com duas fases, água e óleo, e neste caso, o termo dispersivo será ignorado.

O princípio da conservação de massa no volume de controle mostrado na Fig. 8, requer que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo de massa} \\ \text{líquida. do comp. c} \\ \text{em todas as fases} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de massa do comp. c} \\ \text{em todas as fases} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de produção} \\ \text{ou injeção do comp. c} \\ \text{em todas as fases} \end{array} \right\}$$

**Figura 8** - Princípio da Conservação de Massa aplicado ao VC

O fluxo de massa líquido do componente  $c$  na fase  $p$  no volume de controle é dado por,

$$- \frac{\partial(\dot{m}_{cp}^x)}{\partial x} dx - \frac{\partial(\dot{m}_{cp}^y)}{\partial y} dy = - \vec{\nabla} \cdot (y_{cp} \rho_p \vec{u}_p) \quad (2)$$

A taxa de acumulação do componente  $c$  na fase  $p$  no VC pode ser expressa por unidade de volume como,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi y_{cp} \rho_{cp} S_p) \quad (3)$$

onde  $S_p$  representa a saturação da fase  $p$  e é definida como a razão entre o volume da fase  $p$  e o volume total das fases.  $\phi$  representa a porosidade da rocha e é definida como a razão entre o volume de "vazio" ( volume realmente ocupado pelos fluidos ) e o volume total do reservatório. A porosidade é função crescente da pressão e pode ser obtida através da compressibilidade da rocha  $\gamma$ , ou seja,

$$\gamma = -\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp} \quad (4)$$

Os termos de produção/injeção do componente  $c$  na fase  $p$  são dados por ,

$$y_{cp} \rho_p q_p \quad (5)$$

onde  $q_p$  é a vazão de injeção ou produção da fase  $p$  por unidade de volume do reservatório. Para que se tenha conservação do componente  $c$  deve-se somar a contribuição deste componente em todas as fases. Assim a equação do balanço de massa do componente  $c$  fica,

$$-\sum_p \vec{\nabla} \cdot (y_{cp} \rho_p \vec{u}_p) = \sum_p \frac{\partial}{\partial t}(\phi y_{cp} \rho_p S_p) + \sum_p (y_{cp} \rho_p q_p) \quad (6)$$

para  $\begin{cases} p=1,2,3\dots n_p \\ c=1,2,3\dots n_c \end{cases}$

### 2.3 - Equação da Quantidade de Movimento para cada Fase

Em escoamentos em meios porosos, a equação de balanço da quantidade de movimento em escala macroscópica é substituída pela lei de Darcy. Embora esta lei seja originalmente baseada em observações experimentais, ela pode ser obtida usando um procedimento de média para a equação do movimento em escala microscópica.

A lei de Darcy relaciona a velocidade do fluido ao gradiente do potencial existente. Para escoamentos multifásicos em meios porosos, a equação representando a lei de Darcy é escrita como,

$$\vec{u}_p = -\vec{k} \frac{k_{rp}}{\mu_p} (\vec{\nabla} p_p - \gamma_p \vec{\nabla} Z) \quad (7)$$

onde  $\vec{k}$  é o tensor permeabilidade absoluta,  $k_{rp}$  a permeabilidade relativa,  $\mu_p$  a viscosidade,  $\gamma_p$  o peso específico,  $Z$  a profundidade em relação a alguma referência e  $p$  a pressão.

Na maioria dos problemas práticos assume-se que o *tensor permeabilidade absoluta* é esférico, desta forma o tensor permeabilidade absoluta é dado por,

$$\vec{k} = k_x = k_y = k_z \quad (8)$$

Em escoamentos multifásicos cada fluido interfere no escoamento dos outros e as permeabilidades relativas são menores ou iguais à permeabilidade do escoamento monofásico, que é a própria permeabilidade do meio poroso. Isto é fácil de entender, pois diferentes fases disputam o mesmo espaço poroso. A *permeabilidade relativa* é, portanto, função da saturação e é definida como a razão entre a permeabilidade da fase  $k_p$ , e a permeabilidade do meio  $k$ . Assim define-se permeabilidade relativa de uma fase  $p$  como,

$$k_{rp} = \frac{k_p}{k} \leq 1 \quad (9)$$

Muitos trabalhos experimentais têm sido feitos para determinar a permeabilidade relativa

para um sistema bifásico (água-óleo). A Fig. 9 ilustra um sistema onde a água "molha" a rocha e desloca o óleo, ou seja, a fase aquosa adere mais facilmente à superfície da rocha. Entretanto na prática podem ocorrer outros tipos de "molhabilidades" devido a causas naturais, ou como consequência de métodos avançados de recuperação de óleo.

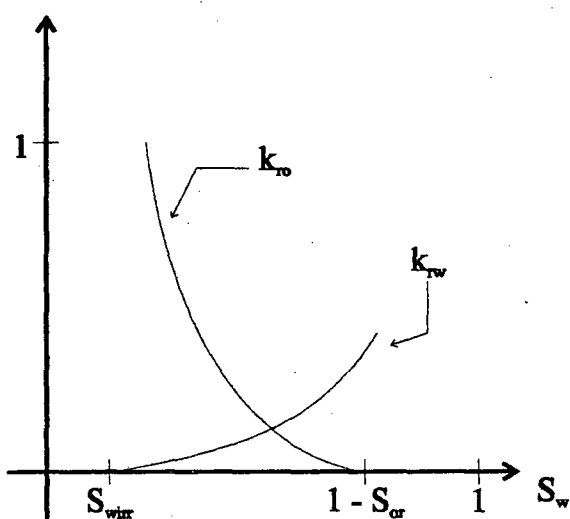


Figura 9 - Curvas de permeabilidades relativas

$S_{wir}$  indica a saturação irreduzível da água (saturação na qual a água não fluirá) e  $S_{or}$  é a saturação residual do óleo (saturação na qual o óleo não pode ser removido do reservatório).

A **viscosidade** usualmente é determinada experimentalmente. Em geral, a viscosidade de um líquido é função decrescente da pressão quando a fase líquida está saturada devido a presença de gás dissolvido. Se o gás não se dissolve no líquido, ou se a fase líquida está subsaturada\*, então a viscosidade cresce com a pressão.

## 2.4 - Formulação "Black-Oil"

O modelo "black-oil" está baseado em parâmetros que levam em conta volumes em condições padrão, pois estes são mais facilmente medidos que concentrações. Ele pode ser deduzido como um caso especial do modelo multifásico considerando-se a existência de três

---

\*Um líquido está subsaturado quando a pressão ao qual está submetido é alta o suficiente para que todo o gás se dissolva na fase líquida.

componentes: água, gás e óleo. No reservatório, os componentes se misturam para formar até três fases: líquida, vapor e aquosa. Na prática, estas são separações que ocorrem naturalmente à temperatura e pressão da superfície. Na formulação "black-oil" as fases água e óleo são imiscíveis, não existindo troca de massa ou mudança de fase entre elas. O componente gás é solúvel na fase óleo mas não na fase água.

O comportamento pressão-volume-temperatura (PVT) nos modelos "black-oil" é expresso pelo *volume de formação* da fase  $p$ ,  $B_p$ , que é definido como,

$$B_p = \frac{V_p}{V_{pp}} \quad (10)$$

onde  $V_{pp}$  é o volume da fase  $p$  nas condições padrão (ou de estocagem) e  $V_p$  é o volume nas condições de reservatório. O volume de formação é função da pressão da fase no reservatório e pode ser obtido experimentalmente ou através da definição de compressibilidade de uma fase,  $c_p$ , a temperatura  $T$  constante,

$$c_p = -\frac{1}{V_p} \left. \frac{\partial V_p}{\partial p} \right|_T \quad (11)$$

Separando as variáveis e denotando  $V_{pRef}$  como o volume à pressão de referência  $p_{Ref}$  tem-se,

$$\frac{V_{pRef}}{V_p} = \exp(c_p (p - p_{Ref})) = 1 + c_p \Delta p \quad (12)$$

Pode-se truncar a expansão em séries de Taylor da exponencial da Eq. (12), pois em muitos fluidos a compressibilidade é pequena. Usando a definição de volume de formação da Eq. (10), tem-se finalmente a expressão para o cálculo do volume de formação para a fase  $p$ .

onde  $\hat{q}_c$  é o fluxo de massa do componente  $c$  (nas condições padrão) por unidade de volume do reservatório e a mobilidade da fase  $\lambda_p$  é definida como,

$$\lambda_p = \bar{k} \left( \frac{k_{rp}}{B_p \mu_p} \right) \quad (17)$$

Neste trabalho utiliza-se um modelo bifásico com escoamento imiscível, água e óleo, que é um caso especial da Eq. (16). Além disso, considera-se que o gradiente de profundidade, a pressão capilar e a compressibilidade da rocha são nulos. Ou seja,

$$\left. \begin{aligned} R_{wo} &= R_{ow} = 0 \\ R_{ww} &= R_{oo} = 1 \\ n_p &= 2 \\ \bar{\nabla}Z &= 0 \\ \bar{\nabla}p_w &= \bar{\nabla}p_o = \bar{\nabla}p \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Assim as equações do modelo "black-oil" bifásico (água e óleo), assumindo as condições da Eq. (18), são,

$$\bar{\nabla} \cdot (\lambda_w \bar{\nabla} p) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) + \hat{q}_w \quad (19)$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\lambda_o \bar{\nabla} p) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) + \hat{q}_o \quad (20)$$



As Eqs. (19) e (20) formam um sistema de duas equações diferenciais contendo três incógnitas,  $p$ ,  $S_w$  e  $S_o$ , logo necessita-se de mais uma equação para fechar o problema matemático. A equação de fechamento do problema é a equação de restrição volumétrica,

$$S_w + S_o = 1 \quad (21)$$

O modelamento matemático não está completo sem a especificação das condições de contorno e as condições iniciais. Basicamente tem-se duas condições de contorno para o sistema de equações,

( i ) Fluxo nulo no contorno,

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n} = 0 \quad em \quad \Gamma \quad p = o, w \quad (22)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma$ .

( ii ) Fluxo especificado no contorno,

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n} = \hat{q}_p(\Gamma) \quad p = o, w \quad (23)$$

Condições de fluxo especificado no poço e no aquífero são usualmente representados por termos fonte/sorvedouro. Para alguns problemas as condições de contorno descritas acima não são explicitamente formuladas nas equações, sendo necessário o uso de modelos adicionais para tratar o escoamento no poço e a interação entre o reservatório e o aquífero.

## *CAPÍTULO TRÊS*

### *MÉTODO DE SOLUÇÃO*

---

#### 3.1 - Introdução

Neste capítulo são integradas , no tempo e no espaço, as equações governantes apresentadas no Capítulo Dois. Em seguida estas equações são discretizadas via volumes finitos para os casos unidimensional e bidimensional\* em coordenadas generalizadas.

Utilizando o caso unidimensional como exemplo, mostra-se como são resolvidas as equações que formam o sistema não-linear, ou seja, são discutidos os passos básicos do método IMPES e o tratamento dado às não-linearidades já citadas.

Para o caso bidimensional são mostradas as equações transformadas para o domínio computacional (  $\xi$  ,  $\eta$  ), assim como os coeficientes da equação aproximada da saturação para a fase água com falha geológica.

#### 3.2 - Caso Unidimensional

Seja um reservatório de comprimento  $C$  muito maior que a largura  $L$  e a profundidade  $H$ . A equação do modelo "black-oil" (Eq. 19) unidimensional, para a fase água é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_w^x \frac{\partial p}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi S_w}{B_w}) + \hat{q}_w \quad (24)$$

A Fig. 10 ilustra um volume de controle unidimensional onde as letras minúsculas indicam os pontos nas faces do volume e as maiúsculas os pontos no centro.

---

\* Embora neste trabalho não seja apresentada a discretização para o caso bidimensional cartesiano, a mesma foi implementada e utilizada para testes do esquema TVD.

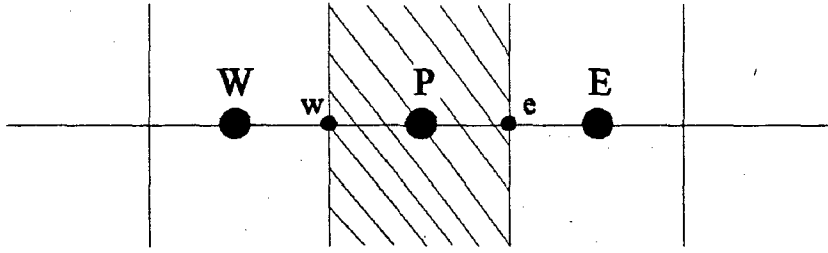


Figura 10 - Volume de controle unidimensional

A equação discretizada é obtida integrando a Eq. (24) no tempo e no volume de controle, mostrado na Fig. 10,

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w^x \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \hat{q}_w dx dt \quad (25)$$

Depois de integrada a Eq. (25) é multiplicada por  $\frac{B_w}{\phi \Delta x}$ , os gradientes de pressão

nas faces são aproximados por um esquema upwind de 1ª ordem e são feitas alguns rearranjos resultando na equação da saturação aproximada na forma explícita para a fase água,

$$S_P^w = A_W^w P_W + A_E^w P_E - A_P^w P_P + F_P^w \quad (26)$$

onde o sobrescrito  $w$  indica fase água,  $A^w$  são os coeficientes e  $F_P^w$  é o termo fonte para o ponto  $P$ . Os coeficientes e o termo fonte são definidos como,

$$A_E^w = \frac{B_P^w \Delta t \lambda_x^w|_e}{\phi \Delta x^2} \quad (27)$$

$$A_W^w = \frac{B_P^w \Delta t \lambda_x^w|_w}{\phi \Delta x^2} \quad (28)$$

$$A_P^w = A_E^w + A_W^w \quad (29)$$

$$F_P^w = \frac{B_P^w S_P^{w^o}}{B_P^{w^o}} - \frac{\hat{q}_P^{w^o} B_P^w \Delta t}{\phi \Delta x H L} \quad (30)$$

onde  $\lambda_x^w|_e$  e  $\lambda_x^w|_w$  são as mobilidades da fase água nas faces este e oeste do volume  $P$  e o sobrescrito  $o$  indica a iteração anterior no tempo.

A equação para o óleo é obtida de maneira análoga e é escrita da seguinte forma,

$$S_P^o = A_W^o P_W + A_E^o P_E - A_P^o P_P + F_P^o \quad (31)$$

Os coeficientes e o termo fonte da Eq. 31 também são análogos aos apresentados nas Eqs. 27 a 30, mudando apenas o índice que indica a fase.

### 3.3 - Método IMPES

No método IMPES (IMplicit Pressure Explicit Saturation) como o próprio nome já sugere, a equação da pressão é resolvida implicitamente e logo em seguida a equação da saturação é resolvida explicitamente. No item 3.2 mostrou-se como são discretizadas as equações para a saturação da água e óleo. Entretanto, será necessário obter a equação da pressão. Esta é obtida somando-se as equações da saturação para a fase óleo (Eq. 31) e água (Eq. 26) e utilizando-se a restrição volumétrica (Eq. 21) mostrada no Capítulo Dois. Assim,

$$S_P^w + S_P^o = (A_W^w + A_W^o)P_W + (A_E^w + A_E^o)P_E - (A_P^w + A_P^o)P_P + (F_P^w + F_P^o) = 1 \quad (32)$$

Substituindo a Eq. (21) na Eq. (32) e efetuando alguma manipulação matemática obtém-se a equação da pressão na forma implícita.

$$A_P P_P = A_W P_W + A_E P_E + FP_P \quad (33)$$

onde  $A$  são os coeficientes da pressão para os pontos e  $FP$  é o termo fonte, que por sua vez são definidos como,

$$A_P = A_P^w + A_P^o \quad (34)$$

$$A_E = A_E^w + A_E^o \quad (35)$$

$$A_W = A_W^w + A_W^o \quad (36)$$

$$FP_P = F_P^w + F_P^o - 1 \quad (37)$$

### 3.4 - Linearização do Termo Fonte da Pressão

Na equação para a pressão, Eq. 33, o termo fonte pode variar com a pressão caso as compressibilidades da água e do óleo sejam diferentes de zero. Esta dependência torna a equação fortemente não-linear dificultando a solução da mesma. Portanto, a linearização proposta por Patankar [45] é utilizada no termo fonte da equação da pressão, ou seja,

$$FP_P = FP_P^* + \frac{d[FP_P^*]}{dP_P} (P_P - P_P^*) \quad (38)$$

onde o sobrescrito \* representa a iteração anterior na solução da equação da pressão. Substituindo a Eq. (38) na Eq. (33), chega-se a novas expressões para o coeficiente  $A_P$  e o termo fonte da pressão no ponto  $P$  como mostram as equações abaixo,

$$FP_P = FP_P^* - \frac{d[FP_P^*]}{dP_P} P_P^* \quad (39)$$

$$A_P = A_P^* + \frac{d[FP_P^*]}{dP_P} \quad (40)$$

### 3.5 - Algoritmo de Solução do Método IMPES

O procedimento iterativo para a solução das equações de pressão\*\* e da saturação apresentas neste capítulo é o seguinte:

- (1) - Estima-se valores iniciais dos campos de saturação da água ( $S_w$ ) e pressão ( $P$ );
- (2) - Calcula-se os volumes de formação, as permeabilidades relativas e as mobilidades para as fases água e óleo;
- (3) - Calcula-se o campo de pressão através da Eq. 33 ;
- (4) - Verifica-se a convergência do campo de pressão, segundo a Eq. (41) . Caso não haja convergência volta-se ao passo (2);
- (5) - Calcula-se o campo de saturação da água através da Eq. 26 ;

---

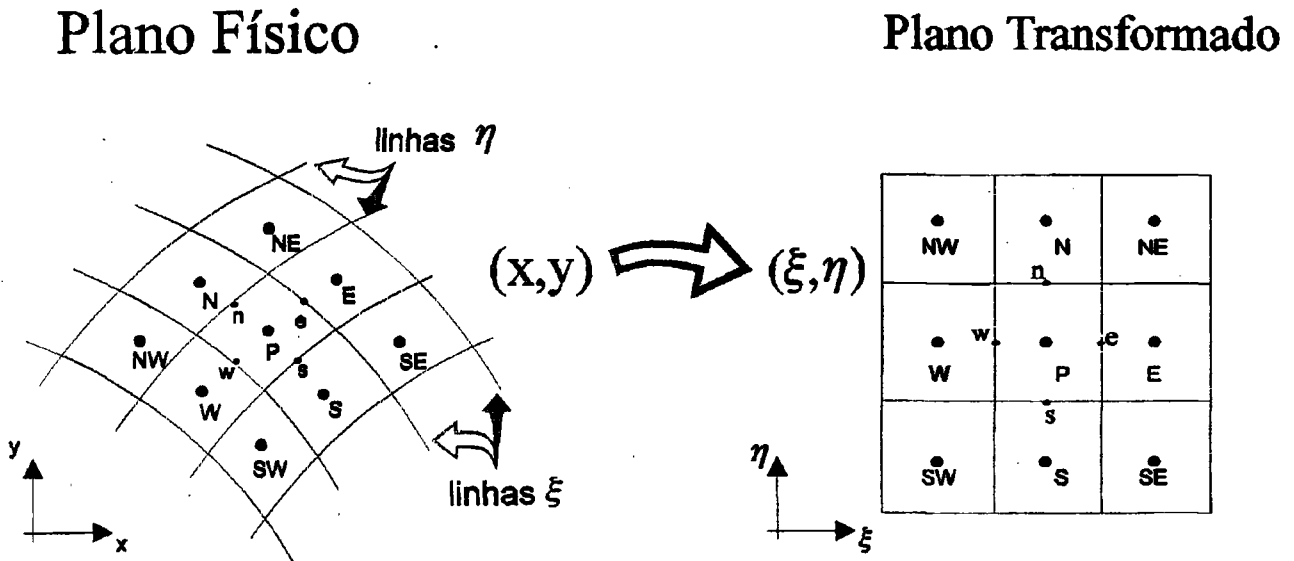
\*\* Para a solução do sistema de equações da pressão foi utilizado um método iterativo de solução denominado MSI [45]

(6) - Incrementa-se o tempo<sup>\*\*\*</sup>, faz-se  $P' = P$  e  $S_w^o = S_w$ . Caso não se tenha atingido o tempo desejado retorna-se ao passo (2).

O critério de convergência utilizado no item (4) é dada por [48],

$$MAX \left( \frac{|P_P - P_P^o|}{P_{\max} - P_{\min}} \right) \leq TOL \quad (41)$$

onde  $TOL$  é a tolerância dada para o campo de pressão.



**Figura 11 - Transformação para coordenadas generalizadas**

### 3.6 - Caso Bidimensional em Coordenadas Generalizadas

O uso de coordenadas generalizadas se baseia na transformação de um domínio físico em um domínio transformado computacional, como ilustra a Fig. 11. Este domínio transformado tem geometria retangular e é nele que são resolvidas numericamente as equações, pois deste

<sup>\*\*\*</sup> O incremento de tempo foi realizado utilizando controle automático de  $\Delta t$  proposto por Aziz e Settari [47].

modo se evitam as interpolações nos contornos do domínio físico. Maiores detalhes sobre o uso de coordenadas generalizadas podem ser vistos em Maliska [48].

A equação de conservação da massa para a fase água quando transformada para o plano curvilíneo bidimensional  $(\xi, \eta)$  assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right] + \hat{q}_w &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ D_1^w \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ D_3^w \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4^w \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

onde,

$$D_1^w = J (\lambda_x^w Y_\eta^2 + \lambda_y^w X_\eta^2) \quad (43)$$

$$D_2^w = -J (\lambda_x^w Y_\xi Y_\eta + \lambda_y^w X_\xi X_\eta) \quad (44)$$

$$D_3^w = J (\lambda_x^w Y_\xi^2 + \lambda_y^w X_\xi^2) \quad (45)$$

$$D_4^w = D_2^w \quad (46)$$

$$J = (X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi)^{-1} \quad (47)$$

O fluxo de massa através das linhas coordenadas é dado pelas componentes contravariantes nas Eqs. (48 e 49),



$$U^w = - \left[ D_1^w \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \quad (48)$$

$$V^w = - \left[ D_3^w \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4^w \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] \quad (49)$$

Integrando no tempo e no espaço a Eq. 36, para o volume de controle elementar no plano transformado mostrado na Fig. 11, tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \xi}{J_P} \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\phi S_P^w}{B_P^w} \right) - \left( \frac{\phi S_P^w}{B_P^w} \right)^o \right] + \hat{q}_P^w = \\ \left[ D_1^w \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]_e \Delta \eta - \left[ D_1^w \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]_w \Delta \eta + \\ \left[ D_3^w \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4^w \frac{\partial P}{\partial \xi} \right]_n \Delta \xi - \left[ D_3^w \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4^w \frac{\partial P}{\partial \xi} \right]_s \Delta \xi \end{aligned} \quad (50)$$

As derivadas parciais são aproximadas de tal forma que servem tanto para os volumes internos quanto para os volumes que estão na fronteira. Assim,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_e = F \xi_P \frac{(P_E - P_P)}{\Delta \xi} \quad (51)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_w = F \xi_W \frac{(P_P - P_W)}{\Delta \xi} \quad (52)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_n = F\eta_P \frac{(P_N - P_P)}{\Delta \eta} \quad (53)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_s = F\eta_s \frac{(P_P - P_S)}{\Delta \eta} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e = \frac{F\xi_P}{\Delta \eta} & (CF\xi_{SE} P_{SE} + CF\xi_E P_E + CF\xi_{NE} P_{NE} \\ & + CF\xi_S P_S + CF\xi_P P_P + CF\xi_N P_N) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_w = \frac{F\xi_W}{\Delta \eta} & (CF\xi_{SW} P_{SW} + CF\xi_W P_W + CF\xi_{NW} P_{NW} \\ & + CF\xi_S P_S + CF\xi_P P_P + CF\xi_N P_N) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_n = \frac{F\eta_P}{\Delta \xi} & (CF\eta_{NW} P_{NW} + CF\eta_N P_N + CF\eta_{NE} P_{NE} \\ & + CF\eta_W P_W + CF\eta_P P_P + CF\eta_E P_E) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_s = \frac{F\eta_s}{\Delta \xi} (CF\eta_{sw} P_{sw} + CF\eta_s P_s + CF\eta_{se} P_{se} + CF\eta_w P_w + CF\eta_P P_P + CF\eta_E P_E) \quad (58)$$

onde  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$

Substituindo-se na Eq. (50) as Eqs (51 a 58) e isolando a saturação, encontra-se,

$$S_P^w = C_1 ( - A_P^w P_P + \sum A_{VIZ}^w P_{VIZ} ) + F_P^w \quad (59)$$

onde o subíndice *VIZ* representa os pontos vizinhos ao ponto *P*,  $A^w$  são seus coeficientes e  $F^w$  é o termo fonte. Os coeficientes, termo fonte e  $C_1$  são dados por,

$$A_E^w = D_{1e}^w F\xi_P + D_{2e}^w F\xi_P CF\eta_E + D_{4n}^w F\eta_P CF\xi_E - D_{4s}^w F\eta_S CF\xi_S \quad (60)$$

$$A_W^w = D_{1w}^w F\xi_W - D_{2w}^w F\xi_W CF\eta_W + D_{4n}^w F\eta_P CF\xi_W - D_{4s}^w F\eta_S CF\xi_W \quad (61)$$

$$A_N^w = D_{3n}^w F\eta_P + D_{4n}^w F\eta_P CF\xi_N + D_{2e}^w F\xi_P CF\eta_N - D_{2w}^w F\xi_W CF\eta_N \quad (62)$$

$$A_S^w = D_{3s}^w F\eta_S - D_{4s}^w F\eta_S CF\xi_S + D_{2e}^w F\xi_P CF\eta_S - D_{2w}^w F\xi_W CF\eta_S \quad (63)$$

$$A_{SW}^w = - D_{2w}^w F\xi_W CF\eta_{sw} - D_{4s}^w F\eta_S CF\xi_{sw} \quad (64)$$

$$A_{SE}^w = D_{2e}^w F\xi_P CF\eta_{se} - D_{4s}^w F\eta_S CF\xi_{se} \quad (65)$$

$$A_{NW}^w = - D_{2w}^w F\xi_w CF\eta_{NW} + D_{4n}^w F\eta_P CF\xi_{NW} \quad (66)$$

$$A_{NE}^w = D_{2e}^w F\xi_P CF\eta_{NE} + D_{4n}^w F\eta_P CF\xi_{NE} \quad (67)$$

$$A_P^w = \sum A_{VIZ}^w \quad (68)$$

$$F_P^w = \frac{B_P^w S_P^{w^o}}{B_P^{w^o}} - \hat{q}_P^o C_1 \quad (69)$$

$$C_1 = \frac{B_P^w J_P \Delta t}{\phi} \quad (70)$$

Os coeficientes  $F\xi$ ,  $F\eta$ ,  $CF\xi$  e  $CF\eta$  são responsáveis pelo tratamento das fronteiras e das falhas geológicas do reservatório. Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice A.

Como já foi explicado no item 3.2, a equação da pressão é obtida utilizando-se a equação de restrição volumétrica (Eq. 21). Assim,

$$A_P P_P = \sum A_{VIZ} P_{VIZ} + F P_P \quad (71)$$

onde os coeficientes e o termo fonte dos pontos são indicados pelo subscrito \*,

$$A_* = (A_*^w B_P^w + A_*^o B_P^o) \frac{J_P \Delta t}{\phi} \quad (72)$$

$$F P_* = F_*^w + F_*^o - 1 \quad (73)$$

A linearização do termo fonte é a mesma mostrada nas Eqs. (39) e (40).

# ***CAPÍTULO QUATRO***

## ***TVD NAS PERMEABILIDADES RELATIVAS E***

### ***MODELO DE POÇO***

---

#### **4.1 - Preliminares**

Neste capítulo serão abordados os aspectos mais relevantes dos esquemas de interpolação utilizados no cálculo das propriedades nas faces do V.C. O esquema TVD (Total Variation Diminishing) é inicialmente mostrado em coordenadas cartesianas e em seguida são apresentadas as transformações necessárias para se obter o TVD em coordenadas generalizadas.

A segunda parte deste capítulo é destinada ao modelo de poço utilizado neste trabalho. Faz-se então, uma breve discussão do modelo de Peaceman e apresenta-se a dedução da expressão de cálculo do raio equivalente de poço em coordenadas generalizadas. Em seguida são discutidas as condições de contorno para os poços.

#### **4.2 - Esquema TVD Explícito\***

Para que um esquema seja TVD, a variação total da função, neste caso a saturação, deve ser não-crescente, ou seja,

$$TV(S^{n+1}) \leq TV(S^n) \quad (74)$$

sendo a variação total definida como,

$$TV(S^n) = \sum_j |S_{j+1}^n - S_j^n| \quad (75)$$

---

\* Por questão de simplicidade não serão utilizados índices para as fases. Entretanto deve-se ter em mente que as equações apresentadas devem ser aplicadas para as fases água e óleo.

onde  $n$  indica o nível de tempo e  $j$  indica o bloco.

O esquema TVD utilizado neste trabalho parte do esquema de Lax-Wendroff, sendo que neste caso multiplica-se a contribuição de segunda ordem por um limitador. Desta forma este termo fica limitado a algumas regiões, prevenindo as oscilações típicas de esquemas de alta ordem.

Rubin e Blunt [37] sugeriram que o esquema TVD fosse aplicado ao termo de fluxo para as fases água e óleo. Para o fluxo no sentido positivo do eixo de coordenadas, pode-se aproximar o fluxo na face este da seguinte forma,

$$f_e = f_P + \Psi(r_P) A_e \quad (76)$$

onde  $f_P$  é o fluxo aproximado no ponto  $P$ ,  $A_e$  é o termo de segunda ordem,  $\Psi$  é o limitador de fluxo e  $r_P$  é a razão de termos sucessivos de segunda ordem, assim definidos,

$$f_P = -\lambda_P \frac{P_E - P_P}{\Delta x} \quad (77)$$

$$A_e = \frac{\Delta x}{2} \frac{f_E - f_P}{\Delta x} \quad (78)$$

$$r_P = \frac{A_w}{A_e} \quad (79)$$

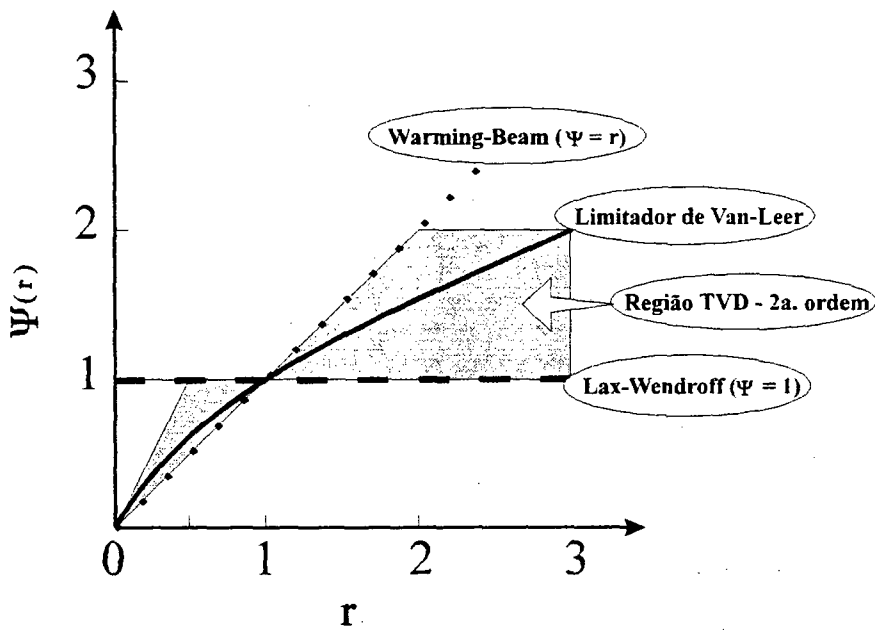
Os limitadores são calculados conforme critérios de existência do TVD e do limite de estabilidade da formulação explícita. Rubin e Blunt demonstraram que para um caso unidimensional explícito o limitador deve estar nas seguintes regiões,

$$2 \geq \Psi(r) \geq 0 \quad (80)$$

e

$$2 \geq \frac{\Psi(r)}{r} \geq 0 \quad (81)$$

Segundo Welge [33], para que um esquema seja de segunda ordem, ele deve ser uma média entre o esquema de segunda ordem de Lax-Wendroff ( $\Psi=1$ ) e o esquema upwind de segunda ordem (Warming-Beam,  $\Psi=r$ ). Deste modo ficam definidas regiões no plano  $\Psi \times r$ , ilustradas na Fig. 12, onde a redução das variações totais está garantida.



**Figura 12** - Região TVD de um limitador de segunda ordem

Existem vários tipos de limitadores, conforme citado na Introdução. Rubin e Blunt utilizaram o limitador de segunda ordem de Van Leer [34]. Pinto [38] em sua dissertação de mestrado traz dois tipos, o limitador de Van Leer e o limitador de terceira ordem na região de Sweby [33] e na região de Liu [35]. Neste trabalho utiliza-se o limitador de Van Leer devido a sua simplicidade de implementação e principalmente devido ao fato deste limitador não se modificar quando se muda o sistema de coordenadas. O limitador de Van Leer é função suave

de  $r$  e é calculado através da seguinte expressão,

$$\Psi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|} \quad (82)$$

É interessante destacar que quando:

- $\Psi(r) = 1$  ,obtem-se um esquema de diferenças centrais;
- $\Psi(r) = r$  , obtem-se um esquema de dois pontos a montante;
- $\Psi(r) = 0$  , obtem-se um esquema de ponto a montante;
- $\Psi(r) = 2$  , obtem-se um esquema de ponto a frente;
- existirem fluxos convergentes ou divergentes, como por exemplo em poços produtores e injetores, respectivamente,  $r < 0$  e  $\Psi(r) = 0$ .

### 4.3 - Esquema TVD em Coordenadas Generalizadas

Rescrevendo a equação de fluxo, Eq. (76), em coordenadas generalizadas para a *direção*  $\xi$  e *sentido positivo*, tem-se,

$$f_e = f_p + \Psi(r_p) A_e \quad (83)$$

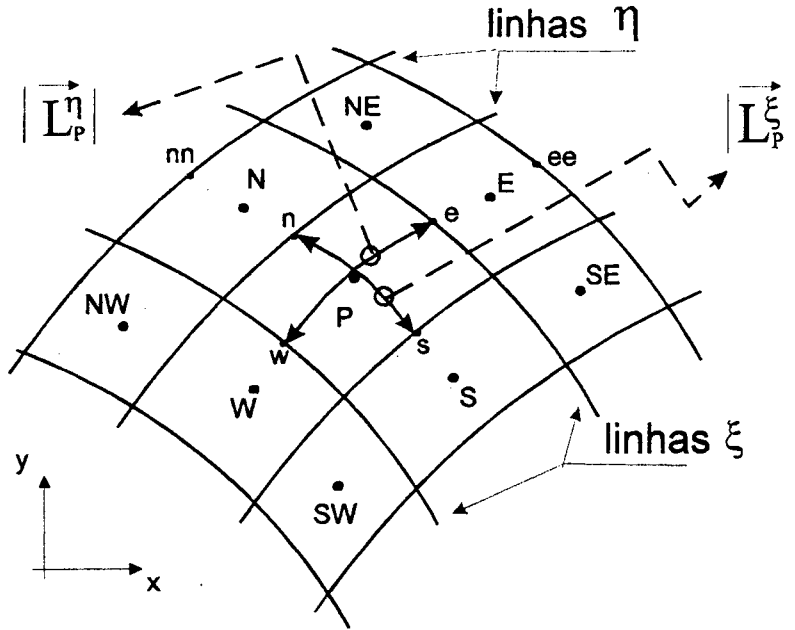
onde,

$$A_e = \frac{\bar{L}_p^\xi}{2} \cdot \bar{\nabla} f_e \quad (84)$$

e o fluxo de massa  $f$  na direção  $\xi$  , para um ponto qualquer, é dado por,

$$f = - \left[ D_1 \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \quad (85)$$





**Figura 13** - Distâncias nas direções  $\xi$  e  $\eta$  - Plano Físico

A Fig. 13 ilustra a distância entre as faces  $w$  e  $e$ ,  $|\vec{L}_P^\xi|$ , e entre as faces  $s$  e  $n$ ,  $|\vec{L}_P^\eta|$ . Em coordenadas generalizadas o vetor comprimento entre as faces  $w$  e  $e$ , e o gradiente do vetor fluxo são dados por [48],

$$\vec{L}_P^\xi = \Delta \xi \ x_{\xi_P} \hat{i} + \Delta \xi \ y_{\xi_P} \hat{j} \quad (86)$$

$$\vec{\nabla} f = J [(f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) \hat{i} + (f_\eta x_\xi - f_\xi x_\eta) \hat{j}] \quad (87)$$

Fazendo-se o produto escalar da Eq. (84),

$$A_e = \frac{1}{2} (D^\xi f_\xi + C^\eta f_\eta)|_e \quad (88)$$

onde,

$$D_e^\xi = J_e (x_{\xi_P} y_{\eta_e} - y_{\xi_P} x_{\eta_e}) \quad (89)$$

$$C_e^\eta = J_e (y_{\xi_p} x_{\xi_e} - x_{\xi_p} y_{\xi_e}) \quad (90)$$

A razão de fluxo e o limitador são calculados da mesma forma que o caso cartesiano, porém neste caso o termo de segunda ordem é calculado através da Eq. (88).

Analogamente na **direção  $\eta$**  e **sentido positivo**, o fluxo na face norte é dado por,

$$f_n = f_p + \Psi(r_p) A_n \quad (91)$$

onde o fluxo na direção  $\eta$  é dado por,

$$f = - \left[ D_3 \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] \quad (92)$$

e a distância entre as faces  $s$  e  $n$ , e o gradiente de fluxo são dados por,

$$\vec{L}_p^\eta = \Delta \eta x_{\eta_p} \hat{i} + \Delta \eta y_{\eta_p} \hat{j} \quad (93)$$

$$\vec{\nabla} f = J [(f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) \hat{i} + (f_\eta x_\xi - f_\xi x_\eta) \hat{j}] \quad (94)$$

Fazendo-se o produto escalar para a face norte,

$$A_n = \frac{1}{2} (D^\eta f_\eta + C^\xi f_\xi) |_n \quad (95)$$

onde,

$$D_n^\eta = J_n (x_{\xi_n} y_{\eta_p} - y_{\xi_n} x_{\eta_p}) \quad (96)$$

$$C_n^\xi = J_n (y_{\eta_n} x_{\eta_p} - x_{\eta_n} y_{\eta_p}) \quad (97)$$

É conveniente observar que as expressões apresentadas para o cálculo dos fluxos nas faces se tornam idênticas àquelas apresentadas para o caso cartesiano igualmente espaçado,

quando  $C = 0$  e  $D = 1$ .

No caso de fluxo no *sentido contrário ao eixo de coordenadas  $\xi$* ,

$$f_e = f_E + \Psi(r_E) A_e \quad (98)$$

onde,

$$A_e = \frac{\vec{L}_E^\xi}{2} \cdot (-\vec{\nabla} f_e) = -\frac{1}{2}(D^\xi f_\xi + C^\eta f_\eta)|_e \quad (99)$$

$$D_e^\xi = J_e(x_{\xi_E} y_{\eta_e} - y_{\xi_E} x_{\eta_e}) \quad (100)$$

$$C_e^\eta = J_e(y_{\xi_E} x_{\xi_e} - x_{\xi_E} y_{\xi_e}) \quad (101)$$

$$r_E = \frac{A_{ee}}{A_e} \quad (102)$$

Na *direção  $\eta$*  tem-se,

$$f_n = f_N + \Psi(r_N) A_n \quad (103)$$

onde,

$$A_n = \frac{\vec{L}_N^\eta}{2} \cdot (-\vec{\nabla} f_n) = -\frac{1}{2}(D^\eta f_\eta + C^\xi f_\xi)|_n \quad (104)$$

$$D_n^\eta = J_n(x_{\xi_n} y_{\eta_N} - y_{\xi_n} x_{\eta_N}) \quad (105)$$

$$C_n^{\xi} = J_n (y_{\eta_n} x_{\eta_N} - x_{\eta_n} y_{\eta_N}) \quad (106)$$

$$r_E = \frac{A_{nn}}{A_n} \quad (107)$$

#### 4.4 - Esquema TVD nas Permeabilidades Relativas

A utilização do esquema TVD no cálculo das permeabilidades relativas nas interfaces foi feita por Pinto [38] para malhas cartesianas. Ele justifica a simplificação de considerar a permeabilidade relativa como um fluxo, mostrando que existe um termo de caráter convectivo na equação de conservação. A seguir será reproduzida esta explicação.

Considerando-se fluxo somente na direção  $x$ , e desprezando-se os efeitos gravitacionais a equação da conservação de massa fica,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_x k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi S}{B} \right) \quad (108)$$

Desprezando-se as variações de  $\mu$  e  $B$ ,

$$-\frac{k_x}{\mu B} \left( \frac{\partial k_r}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + k_r \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi S}{B} \right) \quad (109)$$

Assim o termo de caráter convectivo é dado por  $\frac{\partial k_r}{\partial x}$ .

Deste modo, pode-se fazer uso do esquema TVD bastando para tal, substituir o fluxo pela permeabilidade relativa nas equações mostradas nos itens 4.2 e 4.3.

#### 4.5 - Modelo de Poço Cartesiano

Para as malhas comumente utilizadas em simulação de reservatórios a dimensão do volume elementar (bloco) contendo o poço injetor/produtor é muito maior que a dimensão do poço. Desta forma a pressão do poço não pode ser considerada igual à pressão do bloco. Com o objetivo de solucionar este problema são propostos modelos, analíticos ou numéricos, que relacionam a pressão no poço à pressão no bloco, assumindo que nas proximidades do poço existe escoamento monofásico radial.

Peaceman [41] definiu um raio equivalente de poço,  $r_o$ , como o raio no qual a pressão do bloco ( $p_o$ ) é igual à pressão de fundo de poço ( $p_{wf}$ ). Esta expressão é obtida assumindo regime permanente e escoamento radial monofásico, ou seja,

$$p(r) = p_{wf} + \frac{\hat{q}\mu}{2\pi kh} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) \quad (110)$$

$$p(r) = p_o + \frac{\hat{q}\mu}{2\pi kh} \ln\left(\frac{r}{r_o}\right) \quad (111)$$

onde  $r_w$  é o raio do poço,  $h$  é a espessura do reservatório e  $k$  é a permeabilidade absoluta do meio. Igualando-se as Eqs. (110) e (111),

$$p_{wf} = p_o + \frac{\hat{q}\mu}{2\pi kh} \ln\left(\frac{r_w}{r_o}\right) \quad (112)$$

Para escoamento numa malha cartesiana uniformemente espaçada, como mostra a Fig. 14,

$$\sum_{j=1}^4 \hat{q}_j = \hat{q} \quad (113)$$

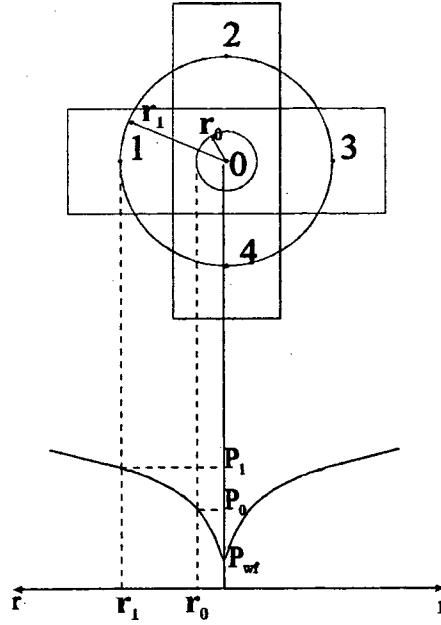


Figura 14 - Fluxo radial em volta de um poço

onde  $j$  é o índice dos quatro blocos em volta do bloco  $0$  e a vazão em cada bloco é,

$$\hat{q}_j = \frac{kh\Delta x}{\mu} \left( \frac{p_j - p_0}{\Delta x} \right) \quad (114)$$

Substituindo a Eq. (114) na Eq. (113) e sabendo que,

$$p_j = p_0 + \frac{\hat{q}\mu}{2\pi kh} \ln\left(\frac{\Delta x}{r_0}\right) \quad (115)$$

obtem-se o valor do raio equivalente de poço. Assim pode-se calcular a pressão de fundo de poço através da Eq. (112),

$$r_0 = \Delta x e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \approx 0,208 \Delta x \quad (116)$$

#### 4.6 - Modelo de Poço em Coordenadas Generalizadas

O modelo de poço em coordenadas generalizadas proposto a seguir, deve ser utilizado com as seguintes restrições [42],

- ✓ o poço deve estar no centro do bloco;
- ✓ o bloco contendo o poço deve estar no interior do domínio calculado;
- ✓ não deve haver falhas geológicas passando por uma das faces deste bloco;
- ✓ o bloco deve obedecer a seguinte restrição geométrica  $1/3 < (\alpha/\gamma) < 3$ , onde  $\alpha$  é a largura do bloco e  $\gamma$  o seu comprimento.

A equação de conservação de massa em regime permanente para o bloco  $P$ , mostrado na Fig. 15, é dada por,

$$\begin{aligned} \hat{q} = & \left[ D_1 \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]_e - \left[ D_1 \frac{\partial P}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]_w + \\ & \left[ D_3 \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right]_n - \left[ D_3 \frac{\partial P}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right]_s \end{aligned} \quad (117)$$

Substituindo os gradientes de pressão nas faces,

$$\begin{aligned} \hat{q} = & D_{1e}(P_E - P_P) + D_{2e} \left( \frac{P_{NE} - P_{SE} + P_N - P_S}{4} \right) - \\ & - D_{1w}(P_P - P_W) - D_{2w} \left( \frac{P_{NW} - P_{SW} + P_N - P_S}{4} \right) + \\ & + D_{3n}(P_N - P_P) + D_{4n} \left( \frac{P_{NE} - P_{NW} + P_E - P_W}{4} \right) - \\ & + D_{4s}(P_P - P_S) - D_{3s} \left( \frac{P_E - P_W + P_{SE} - P_{SW}}{4} \right) \end{aligned} \quad (118)$$

e sabendo que,

$$P_N - P_P = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_N}{r_P} \right) \quad (119)$$

$$P_S - P_P = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_S}{r_P} \right) \quad (120)$$

$$P_E - P_P = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_E}{r_P} \right) \quad (121)$$

$$P_W - P_P = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_W}{r_P} \right) \quad (122)$$

Os fluxos cruzados podem ser obtidos através da seguinte manipulação matemática,

$$P_{NE} - P_{SE} = (P_{NE} - P_P) - (P_{SE} - P_P) = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_{NE}}{r_{SE}} \right) \quad (123)$$

$$P_N - P_S = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_N}{r_S} \right) \quad (124)$$

$$P_{SW} - P_{NW} = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_{SW}}{r_{NW}} \right) \quad (125)$$



$$P_{NE} - P_{NW} = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_{NE}}{r_{NW}} \right) \quad (126)$$

$$P_E - P_W = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_E}{r_W} \right) \quad (127)$$

$$P_{SW} - P_{SE} = \frac{\hat{q} \mu B}{2 \pi k h} \ln \left( \frac{r_{SW}}{r_{SE}} \right) \quad (128)$$

onde  $r$  são os raios com centro no ponto  $P$ . A Fig. 15 ilustra alguns destes raios.

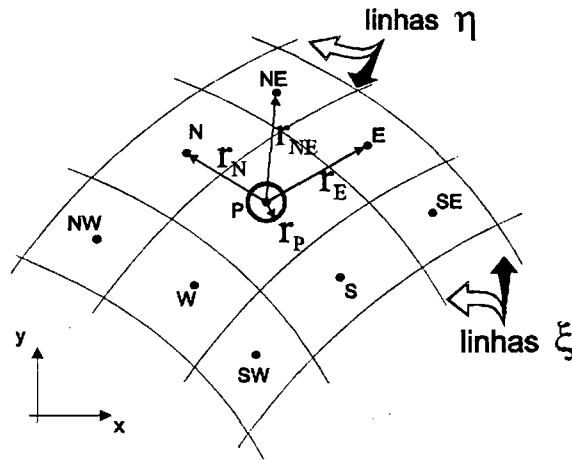


Figura 15 - Distâncias radiais

Substituindo as Eqs. (119) a (128) na Eq. (118), isolando  $r_P$  e sabendo que num escoamento monofásico,

$$D_1 = \frac{k h}{\mu B} (Y_\eta^2 + X_\eta^2) J = \frac{k h}{\mu B} \alpha J \quad (129)$$

$$D_2 = D_4 = -\frac{kh}{\mu B} (X_\xi X_\eta + Y_\xi Y_\eta) J = -\frac{kh}{\mu B} \beta J \quad (130)$$

$$D_3 = \frac{kh}{\mu B} (Y_\xi^2 + X_\xi^2) J = \frac{kh}{\mu B} \gamma J \quad (131)$$

obtém-se a expressão para o raio equivalente de poço em coordenadas generalizadas,

$$r_P = e^{-2\pi} \left( \prod_{VIZ} r_{VIZ}^{n_{VIZ}} \right)^{\frac{1}{n_P}} \quad (132)$$

onde,

$$n_E = J_e \alpha_e - \frac{J_n \beta_n + J_s \beta_s}{4} \quad (133)$$

$$n_W = J_w \alpha_w + \frac{J_n \beta_n - J_s \beta_s}{4} \quad (134)$$

$$n_N = J_n \alpha_n - \frac{J_e \beta_e + J_w \beta_w}{4} \quad (135)$$

$$n_S = J_s \alpha_s - \frac{J_w \beta_w + J_e \beta_e}{4} \quad (136)$$

$$n_{NE} = \frac{-J_e \beta_e - J_n \beta_n}{4} \quad (137)$$

$$n_{SW} = \frac{-J_s \beta_s - J_w \beta_w}{4} \quad (138)$$

$$n_{SE} = \frac{J_e \beta_e + J_s \beta_s}{4} \quad (139)$$

$$n_{NW} = \frac{J_w \beta_w + J_n \beta_n}{4} \quad (140)$$

$$n_P = J_e \alpha_e + J_w \alpha_w + J_n \alpha_n + J_s \alpha_s \quad (141)$$

#### 4.7 - Condição de Contorno nos Poços

Como foi citado no Capítulo Dois a condição de contorno para os poços não é explicitada na formulação das equações, sendo esta condição expressa através de termos fonte/sorvedouro ou através de modelos adicionais. Neste trabalho são utilizados dois tipos de condição de contorno.

##### ( 1 ) Condição de Contorno Baseada nas Mobilidades

Esta condição admite que os efeitos de capilaridade nas regiões próximas aos poços são desprezíveis. Assim sendo, a vazão de cada fase é proporcional às mobilidades.

##### ( 1.1 ) Vazão de Óleo Prescrito no Poço Produtor ( $Q_o$ )

$$\hat{q}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} Q_o \quad (142)$$

$$\hat{q}_o = Q_o \quad (143)$$

( 1.2 ) *Vazão de Líquido (óleo + água) Prescrito no Poço Produtor (  $Q_L$  )*

$$\hat{q}_w = \left( \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o} \right) Q_L \quad (144)$$

$$\hat{q}_o = \left( \frac{\lambda_o}{\lambda_w + \lambda_o} \right) Q_L \quad (145)$$

onde  $Q_L = Q_w + Q_o$

(1.3) *Condição de Contorno no Poço Injetor*

No poço injetor a vazão de água sempre é prescrita (  $Q_{INJ}$  ) e a de óleo é nula.

$$\hat{q}_w = Q_{INJ} \quad (146)$$

$$\hat{q}_o = 0 \quad (147)$$

( 2 ) *Condição de Contorno Baseada nas  $P_{wi_{max}}$  e  $P_{wf_{min}}$* 

Quando a pressão de fundo de poço do bloco contendo o poço injetor (  $P_{wf}$  ) atinge a pressão máxima de injeção (  $P_{wi_{max}}$  ) as vazões de água e óleo são dadas por,

$$\hat{q}_w = \frac{2 \pi k h}{\mu_w B_w \ln \frac{r_p}{r_w}} (P - P_{wi_{max}}) \quad (148)$$

e

$$\hat{q}_o = 0 \quad (149)$$

onde  $r_w$  é o raio do poço.

A pressão máxima de injeção em um poço injetor é limitada pela capacidade da bomba injetora e pela pressão de fraturamento da rocha do reservatório. Já a pressão mínima de fundo (  $P_{wf_{min}}$  ) em um poço produtor normalmente está associada à pressão mínima para que o óleo consiga chegar até a superfície. [50]

Quando a pressão de fundo de poço do bloco contendo o poço produtor atinge a pressão mínima de fundo a vazão de água e óleo passam a ser,

$$\hat{q}_w = \frac{2 \pi k k_{r_w} h}{\mu_w B_w \ln \frac{r_p}{r_w}} (P - P_{wf_{min}}) \quad (150)$$

$$\hat{q}_o = \frac{2 \pi k k_{r_o} h}{\mu_o B_o \ln \frac{r_p}{r_w}} (P - P_{wf_{min}}) \quad (151)$$

## ***CAPÍTULO CINCO***

### ***RESULTADOS E DISCUSSÕES***

---

#### **5.1 - Preliminares**

Neste capítulo serão feitas discussões dos resultados obtidos utilizando as ferramentas numéricas expostas nos capítulos três e quatro. Com o objetivo de sistematizar a validação do modelo computacional e de comparar os esquemas de interpolação utilizados, os resultados foram divididos em três grupos.

O primeiro grupo contém os resultados que validam o código computacional utilizado. Nesta validação foram utilizados dois casos com configuração 1/4 de "five-spot", malhas cartesianas e generalizadas, e várias razões de viscosidade óleo-água.

O segundo grupo é destinado a comparações entre métodos de interpolação (upwind e TVD) e o estudo da influência do método TVD em um tipo especial de escoamento conhecido como deslocamento Tipo Pistão.

O último grupo contém dois problemas com reservatório de contorno irregular e vários poços produtores e injetores. No primeiro caso o reservatório possui uma falha geológica e no segundo é resolvido o mesmo reservatório sem a falha. São comparados casos com interpolação upwind e TVD.

#### **5. 2 - Grupo A - Validações**

Como já foi exposto anteriormente neste grupo estão os casos destinados a validar o código computacional utilizado. O primeiro caso valida o código utilizando malhas cartesianas, razão de viscosidades óleo-água unitária ( $M = 1$ ) e os métodos de interpolação upwind e TVD. No segundo são feitas as validações para malhas generalizadas,  $M > 1$  e interpolação upwind.

### 5.2.1 - Caso 1 - Malhas Cartesianas - M=1

Este problema foi resolvido por Pinto [38] e consiste na injeção de água em um reservatório bidimensional homogêneo e isotrópico, horizontal, com configuração 1/4 de "five-spot". O reservatório é um quadrado com 1000 metros (3280 pés) de lado e 10 metros de profundidade. A porosidade da rocha é 0,20 e sua permeabilidade absoluta  $0,1974 \mu\text{m}^2$  (200 mD).

A Tabela I traz os dados referentes às curvas de permeabilidades da água e do óleo.

**Tabela I - Curvas de Permeabilidades**

$S_w$	$k_{rw}$	$k_{ro}$
0	0	1,0
0,22	0	1,0
0,3	0,08	0,4
0,4	0,12	0,12
0,6	0,4	0
0,8	0,65	0
1,0	1,0	0

Para os volumes de formação foram usados as seguintes funções,

$$B_o = 1,4 - (1,455 \cdot 10^{-8})P \quad (152)$$

$$B_w = 1,4 - (1,455 \cdot 10^{-9})P \quad (153)$$

onde as pressões são dadas em Pascal.

O raio do poço ( $r_w$ ) é 0,122 m (0,4 ft) e o raio equivalente de poço utilizado no modelo de poço é o mesmo utilizado por Pinto [38], ou seja,

$$r_0 = 0,198\Delta x \quad (154)$$

As viscosidades da água e do óleo são constantes e iguais a 0,5 mPa.s (0,5 cP). Os dados restantes são apresentados na Tabela II.

Os casos foram rodados com a mesma malha utilizada por [38], ou seja, malha cartesiana 10x10 igualmente espaçada. Em [38] são apresentadas curvas apenas para os casos com formulação implícita e semi-implícita. Portanto, as curvas mostradas a seguir foram obtidas utilizando o código computacional cedido gentilmente pelo autor em questão.

**Tabela II - Dados Complementares - Grupo A - Caso 1**

Pressão Inicial	20682 kPa (3000 psi)
Saturação Inicial	0,22
Vazão de Óleo Inicial	238,47 m <sup>3</sup> /dia (1500 STB/dia )
Vazão de Injeção Inicial	238,47 m <sup>3</sup> /dia (1500 STB/dia )
Pressão Máx. de Injeção	55152 kPa ( 8000 psi)
Pressão Mín. de Fundo	344,7 kPa (50 psi)
Var. Máx. da Sat. na Iter.	0,02
Var. Máx. da Pressão na Iter.	137,9 kPa (20 psi)
$\Delta t$ máximo	10 dias
$\Delta t$ mínimo	0,01 dia
Tolerância (TOL)	$1 \cdot 10^{-7}$
Corte de Água Máximo	0,8

Cabe aqui um parêntese para que sejam definidos dois números adimensionais, o corte de água e o volume poroso deslocável injetado, que serão largamente utilizados neste trabalho.

O *Corte de Água* é definido como a razão entre a vazão de água e a vazão total (água + óleo) produzidos em um poço qualquer. Este número adimensional é importante porque através dele pode-se prever quando haverá irrupção de água no poço produtor. E o conhecimento da porcentagem de água que é produzida, dá subsídios para que se avalie a viabilidade econômica de um poço.



O *Volume Poroso Deslocável Injetado (VPI)* é um número adimensional bastante utilizado em engenharia de petróleo e serve como escala de tempo. O VPI relaciona quanto de água foi injetado com o volume total que é possível retirar deste reservatório. Em outras palavras, 1 VPI quer dizer que foi injetada uma quantidade de água equivalente ao volume de óleo total disponível neste reservatório. Assim,

$$VPI = \frac{\hat{q}_w t}{\phi V_R (1 - S_{wirr})} \quad (155)$$

onde  $V_R$  é o volume total do reservatório,  $t$  é o tempo decorrido e  $S_{wirr}$  a saturação irreduzível da água.

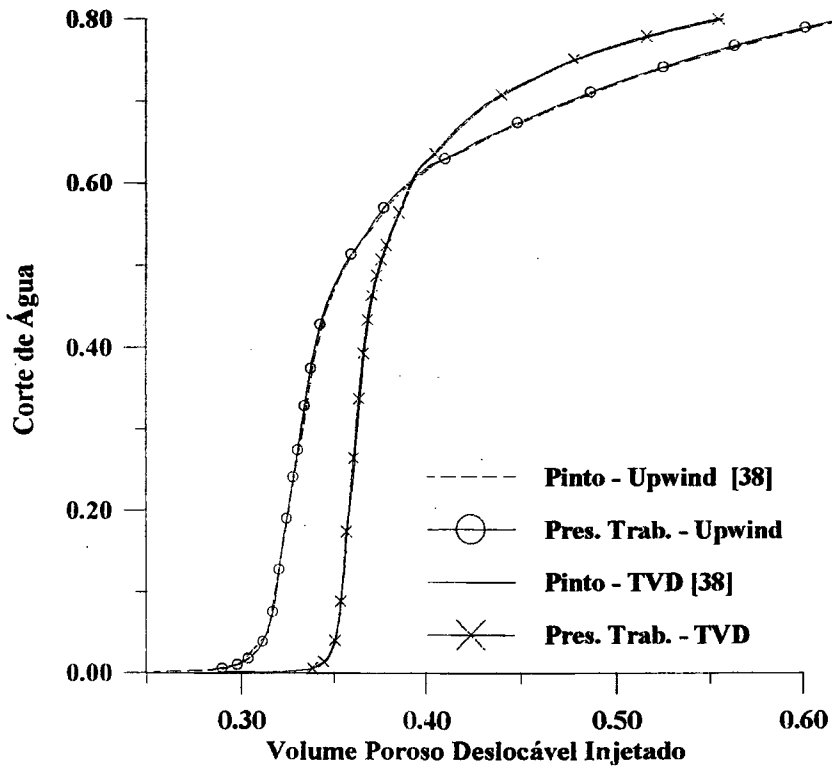


Figura 16 - Validação de casos cartesianos com malha 10x10 e  $M=1$

A Fig 16 mostra o corte de água versus VPI para os casos utilizando interpolação upwind e TVD nas permeabilidades relativas. Pode-se observar que tanto o caso com interpolação upwind, quanto o caso com TVD nas permeabilidades relativas, têm resultados muito próximos aos mostrados por Pinto. Os tempos de irrupção de água e de fechamento de poço (vide Tabela

III), que neste caso correspondem aos tempos com cortes de água iguais a 1% e 80%, são muito próximos. A variação máxima observada foi de 4,08% para o corte igual a 80% e caso TVD.

Fica evidenciado pelos resultados da Tabela III que o uso de esquemas upwind adianta em quase um ano a irrupção de água. Este fato se deve a maior dispersão numérica produzida pelo esquema upwind, que provoca uma suavização da frente (dispersão numérica) de saturação de água e, conseqüentemente, a água atinge o poço produtor prematuramente.

**Tabela III** - Comparação de tempos de irrupção e fechamento do poço

		Pinto [38] (dias)	Pres. Trab. (dias)	Variação Relativa (%)
Corte 1% (irrupção)	Upwind	1980	1956	1,21
	TVD	2259	2240	0,84
Corte 80% (fechamento)	Upwind	4148	4031	2,82
	TVD	3778	3624	4,08

### 5.2.2 - Caso 2 - Malhas Generalizadas - $M > 1$

Para validar os procedimentos numéricos em coordenadas generalizadas e esquema de interpolação upwind foi utilizado um problema com configuração geométrica e dados físicos propostos por Palagi [51]. Este problema consiste na injeção de água em uma configuração 1/4 de "five-spot". O reservatório é considerado homogêneo e isotrópico e as propriedades do fluido e da rocha, bem como os dados complementares, são dados na Tabela IV.

O problema descrito neste item é resolvido para  $M=10$  e  $M=50$ , onde  $\mu_o = 1$  mPa.s e  $\mu_w = 1/M$  mPa.s. Os volumes de formação da água e do óleo são calculados segundo a Eq. (13) com compressibilidades iguais a  $1,1451 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$  ( $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$ ). As permeabilidades relativas usadas são,

$$k_{rw} = S_w^2$$

$$k_{ro} = (1 - S_w)^2$$
(156)

Tabela IV - Dados Complementares - Grupo A - Caso 2

Comprimento	402,33 m (1320 ft)
Largura	402,33 m (1320 ft)
Profundidade	6,09 m (20 ft)
Porosidade	0,2
Permeabilidade Absoluta	0,012337 $\mu\text{m}^2$ (12,5 mD)
Pressão Inicial	689,4 kPa (100 psi)
Saturação Inicial	0
Vazão de Produção Total	9,534 m <sup>3</sup> /dia (60 STB/dia )
Vazão de Injeção Inicial	9,534 m <sup>3</sup> /dia (60 STB/dia )
Pressão Máx. de Injeção	55152 kPa ( 8000 psi)
Pressão Mín. de Fundo	344,7 kPa (50 psi)
Var. Máx. da Sat. na Iter.	0,02
Var. Máx. da Pressão na Iter.	137,9 kPa (20 psi)
$\Delta t$ máximo	10 dias
$\Delta t$ mínimo	0,001 dia
Tolerância (TOL)	1 $10^{-7}$

Neste caso não se utiliza modelo de poço, pois o poço está representado por dois contornos com raios iguais a 0,122 m (0,4 ft) e a condição de contorno de poço é aplicada na superfície do poço e não no volume discreto. Ou seja, neste caso, não existe um bloco que

contém o poço no seu interior. A Fig. 17b ilustra a malha em coordenadas generalizadas e a representação dos poços através do contorno. Esta malha contém 20 volumes na direção  $\xi$  e 20 na direção  $\eta$ .

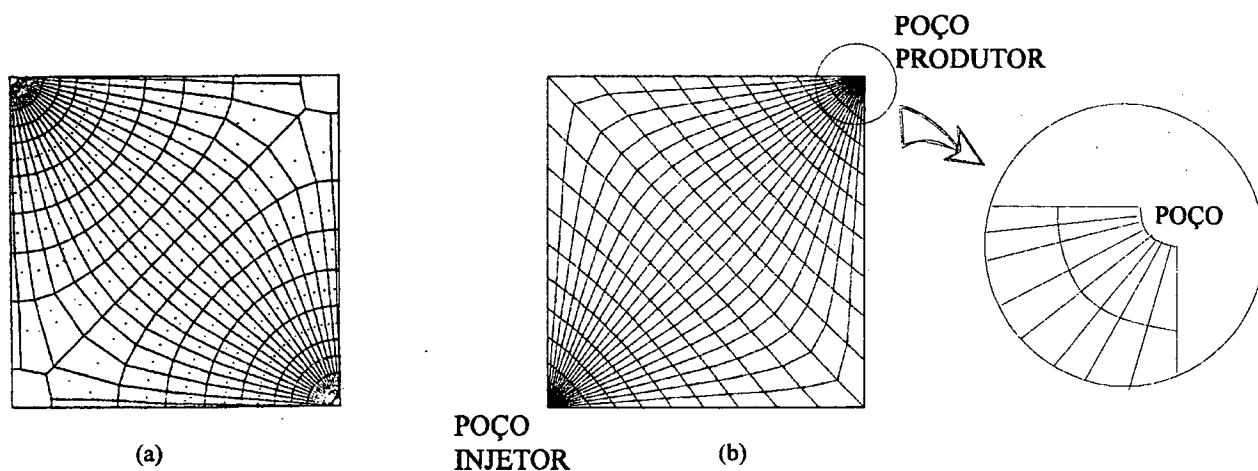


Figura 17 - (a) Malha "curvilínea" de Voronoi. (b) Malha generalizada 20x20

A malha utilizada por Palagi [51] é uma malha "curvilínea" de Voronoi que contém 445 volumes. Como em [51] não está ilustrada esta malha, a Fig. 17a mostra uma outra malha, utilizada também em [51], para que se possa ter uma idéia da malha "curvilínea" de Voronoi. As duas malhas em questão não são idênticas. Porém, segundo Palagi, a malha curvilínea de Voronoi é capaz de reproduzir resultados equivalentes àqueles obtidos com malha curvilínea.

A Fig. 18 apresenta as curvas de Volume Poroso de Óleo Recuperado versus VPI. O *Volume Poroso de Óleo Recuperado (VPOR)* é um número adimensional de desempenho da produção. Ele indica quanto foi produzido de óleo, em relação ao total de óleo que é possível recuperar em um reservatório. A expressão utilizada para calcular o *VPOR* é dada por,

$$VPOR = \int_{t_o}^t \frac{\hat{q}_o(t)}{\phi V_R (1 - S_{wirr})} dt \quad (157)$$

Apesar da diferença de geometria das malhas e do número de volumes, os resultados mostram muito boa concordância. Entretanto uma pequena diferença entre os resultados é

observada, provavelmente devido à diferença no número de volumes utilizados.

No início do processo de injeção a vazão de óleo produzido é igual a vazão de água injetada, menos uma pequena parcela devido as compressibilidades dos fluidos. Isto é reproduzido no gráfico VPOR x VPI através de uma linha reta com inclinação de aproximadamente 45°. Assim que a água atinge o poço produtor a relação se modifica, e como já foi citado nos capítulos anteriores, a produção de óleo cai (Vide Fig. 18). Sabendo disto, pode-se determinar, embora com menor precisão, o momento de irrupção de água no poço produtor. Outro fato interessante a ser destacado é a diferença de desempenho entre a recuperação com  $M=10$  e  $M=50$ . Fica bem caracterizado que para  $M=50$  a irrupção ocorre com grande antecedência, se comparado com  $M=10$ . Isto se deve ao aparecimento de "dedos", que são responsáveis, como já foi citado na Introdução, pela menor produção das recuperações com razões de viscosidades altas. A Fig. 19 mostra os campos de saturação para os dois casos estudados, neles pode-se observar a formação de "dedos".

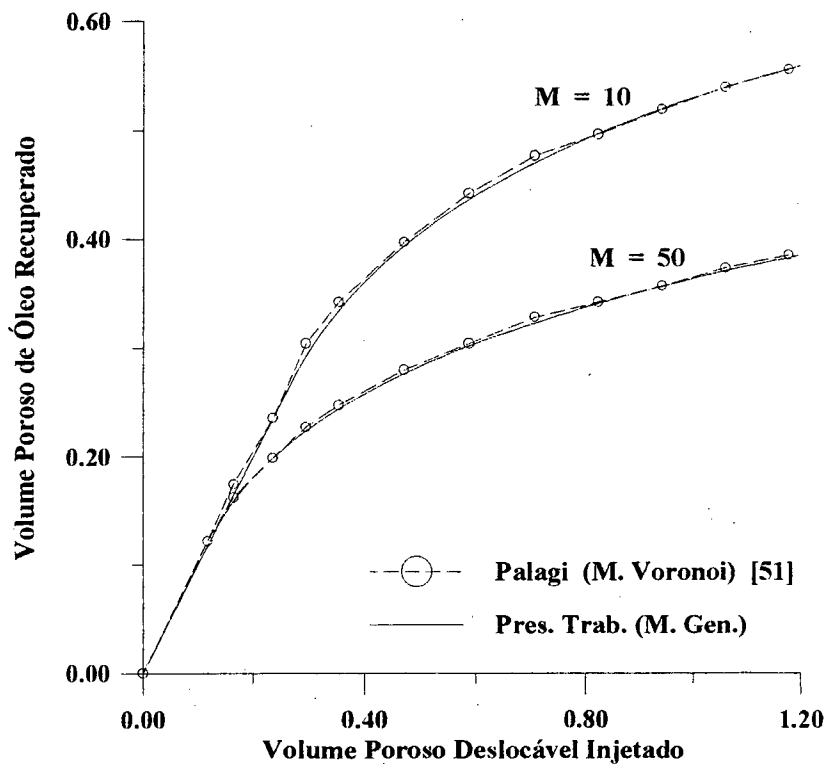
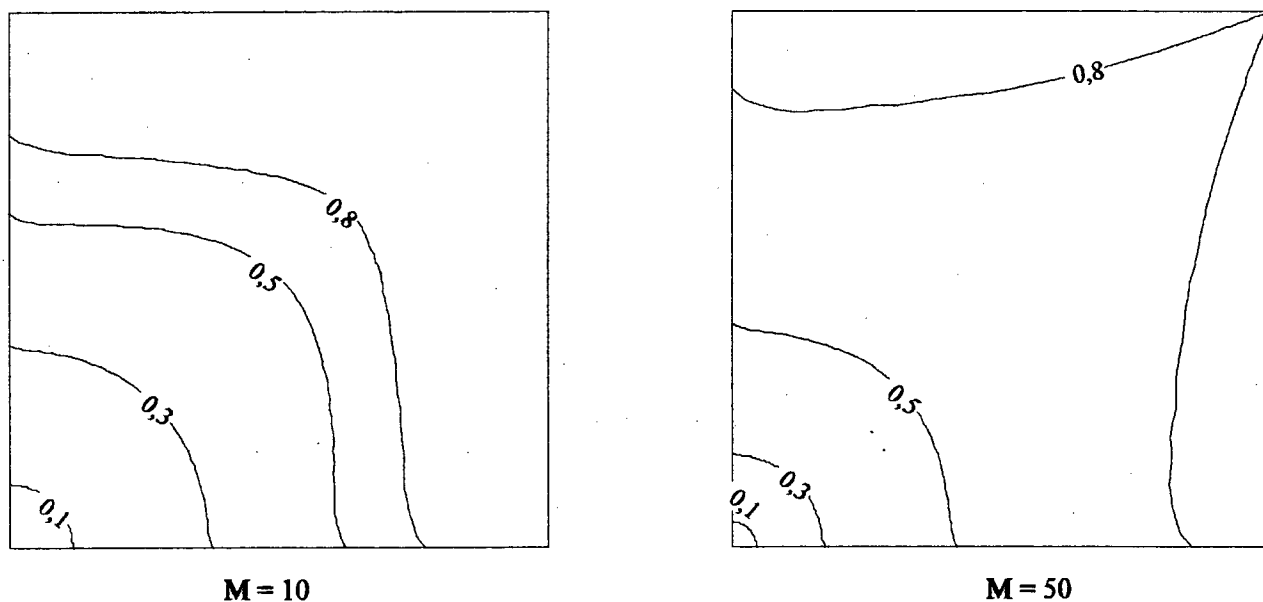


Figura 18 - Validação de casos com malhas generalizadas,  $M>1$  e interpolação upwind

## UPWIND - MALHA 30 X 40

Figura 19 - Isocurvas de saturação em  $VPI=0,2$ 

### 5.3 - Grupo B - Comparações - TVD x Upwind

Este grupo contém os casos utilizados para comparar os métodos de interpolação upwind e TVD para várias razões de viscosidade. Para tal são utilizadas sempre duas malhas uma mais refinada e outra grosseira. A malha mais refinada só é utilizada com o método upwind, e a mais grosseira com os dois métodos. Desta forma, pode-se avaliar os resultados do caso com interpolação TVD, utilizando como parâmetro os resultados do caso com malha mais refinada e interpolação upwind.

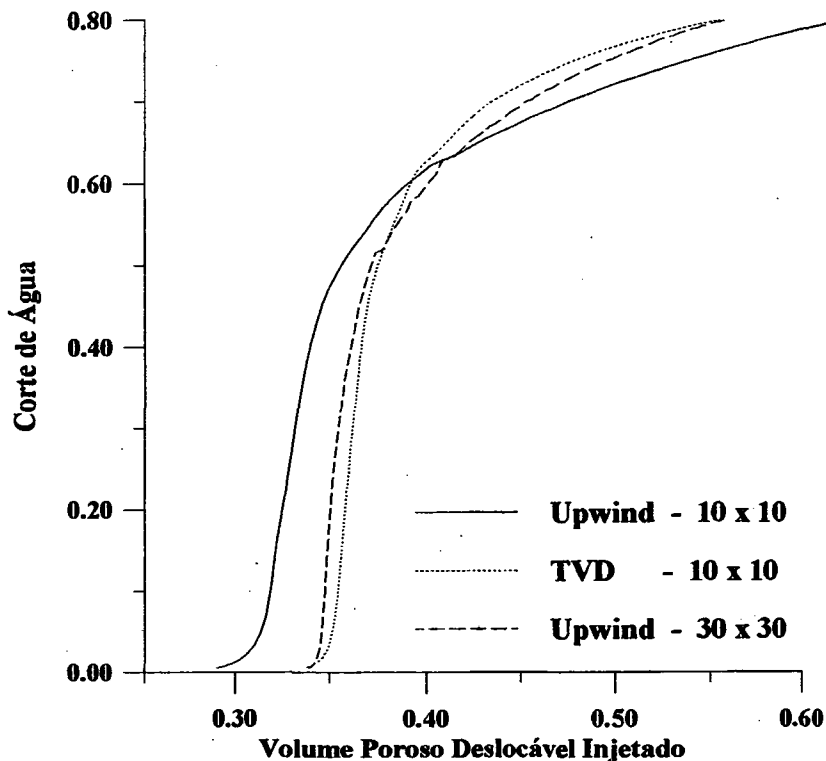
#### 5.3.1- Malha Cartesiana

O problema físico utilizado neste caso é o mesmo do item 5.2.1, só que neste caso são utilizadas duas malhas 10x10 e 30x30. Os dados são iguais para as duas malhas, sendo o controle automático de  $\Delta t$  diferente para o casos refinado. Neste caso para o controle de passo de tempo

utilizou-se  $\Delta p_{\max} = 69,95 \text{ kPa}$  (10 psi),  $\Delta s_{\max} = 0,01$  e  $\Delta t_{\max} = 1 \text{ dia}$ .

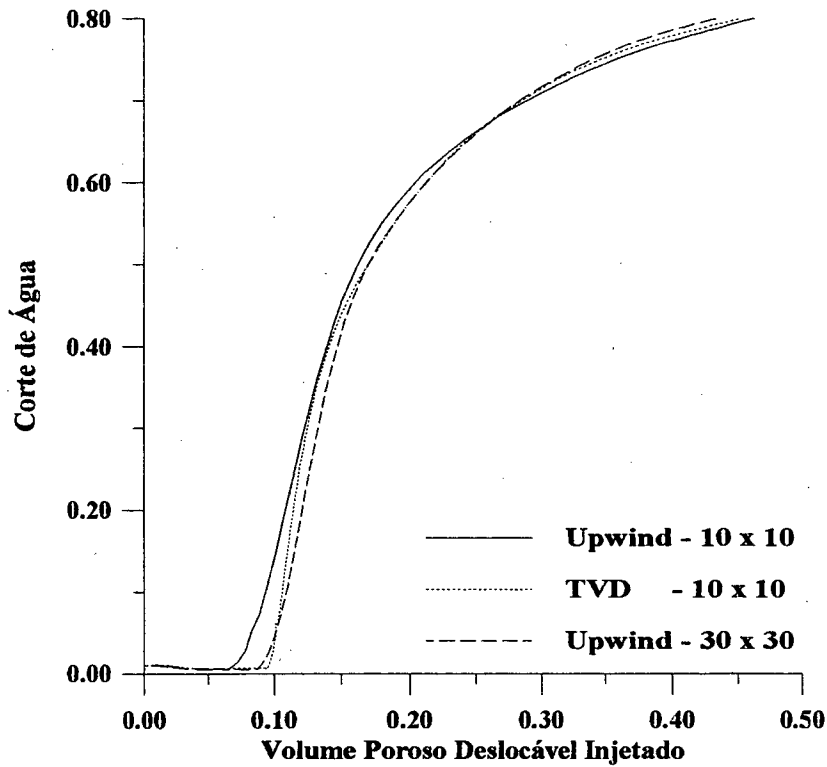
As Figs. 20 a 22 mostram as curvas de corte de água versus VPI. Pode-se notar que as curvas para a malha 10x10 com TVD se aproximam muito daquela com malha 30x30 upwind. Comparando-se os dois métodos com a mesma malha, vê-se que há melhor captação do tempo de irrupção e abandono do poço (corte 80%) no caso com TVD.

Para os casos com  $M > 1$ , nota-se que o corte de água é diferente de zero no início da produção, ou seja, há produção de água mesmo sem a frente ter alcançado o poço produtor. Isto se deve ao deslocamento da água presente inicialmente nas regiões próximas ao poço produtor, devido ao elevado gradiente de pressão observado nestas regiões antes da irrupção de água injetada.

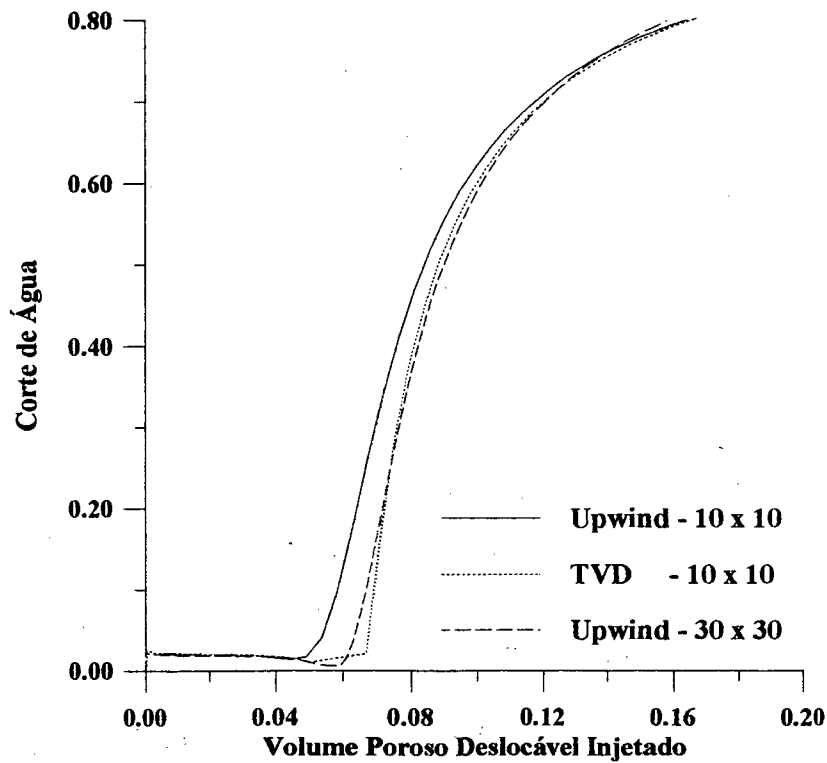


**Figura 20** - Comparação entre métodos de interpolação, malha cartesiana e  $M=1$ .

A Fig. 23 apresenta as isolinhas de saturação para  $VPI = 0,2$ . Através da Fig. 23 pode-se verificar que os campos para os casos 10x10 com interpolação TVD são muito semelhantes aos campos dos casos 30x30 com interpolação upwind. A largura da frente de saturação no caso TVD é bem menor que no caso 10x10 com interpolação upwind. Este fato é mais facilmente



**Figura 21** - Comparação entre métodos de interpolação, malha cartesiana e  $M=10$ .



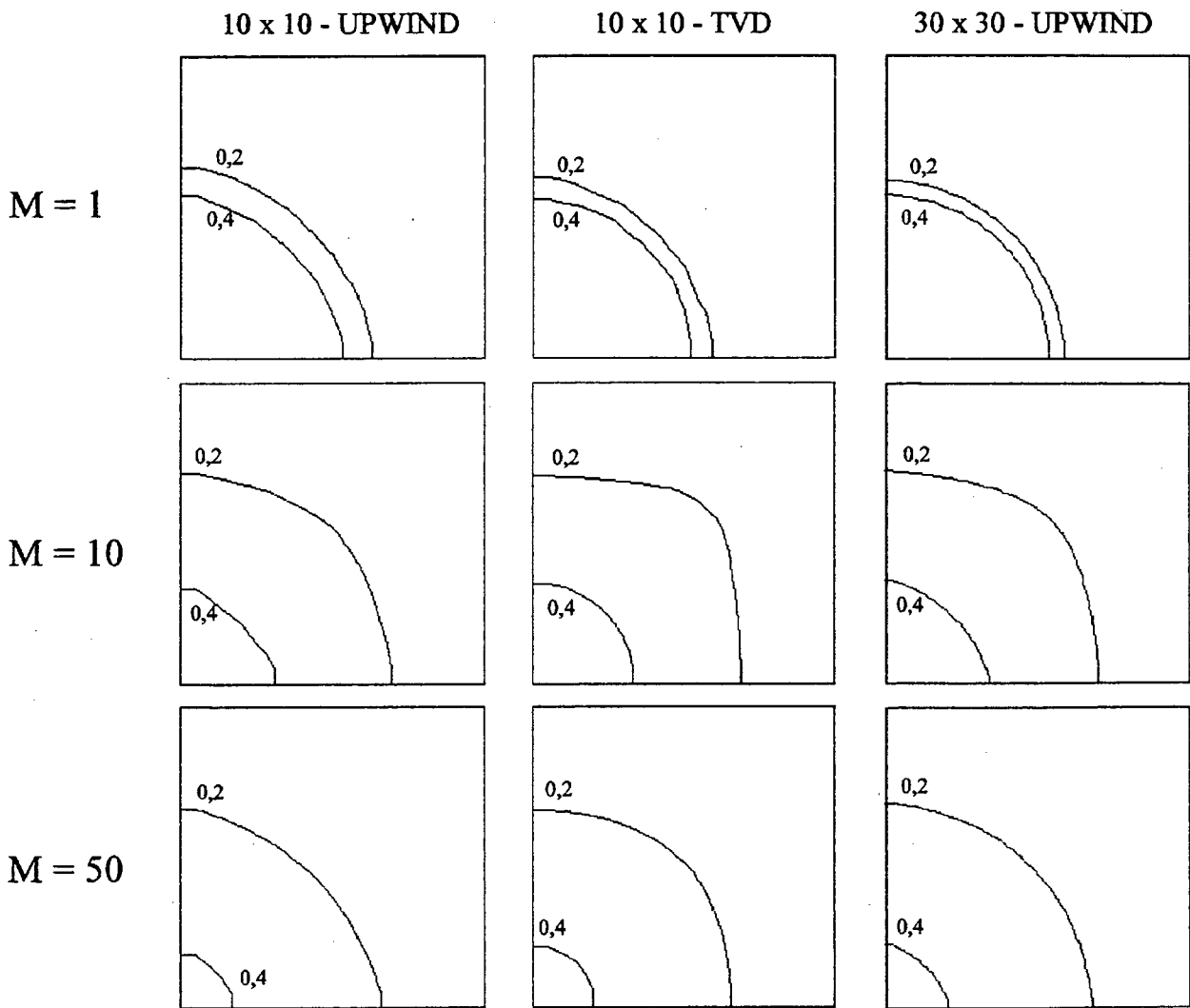
**Figura 22** - Comparação entre métodos de interpolação, malha cartesiana e  $M=50$ .

identificado para  $M=1$ .

Comparando campos com mesma malha e mesmo método de interpolação, porém com



razão de viscosidades diferentes, nota-se que há maior dispersão para razões de viscosidades maiores. A dispersão de uma frente em escoamentos imiscíveis tem duas causas. A primeira delas é física e o responsável pelo seu aparecimento é a pressão capilar. A segunda causa é numérica e segundo Brand et al [13], é proporcional a orientação da malha, número de volumes e à razão de viscosidades. Como neste caso a pressão capilar é nula e as malhas são iguais, o fenômeno de dispersão da frente observado é causado apenas pela dispersão numérica.



**Figura 23** - Isocurvas de saturação em  $VPI = 0,2$  - malha cartesiana

Através da Tabela VI pode-se constatar que os tempos de CPU\* dos casos rodados com malha 10x10 são da mesma ordem de grandeza, sendo o tempo gasto pelo caso TVD superior. Quanto ao tempo gasto pelo caso 30x30, convém ressaltar que com o uso de  $\Delta t$  variável o tempo

\* Todos os caso rodados foram rodados em uma SUN SPARCSTATION 10

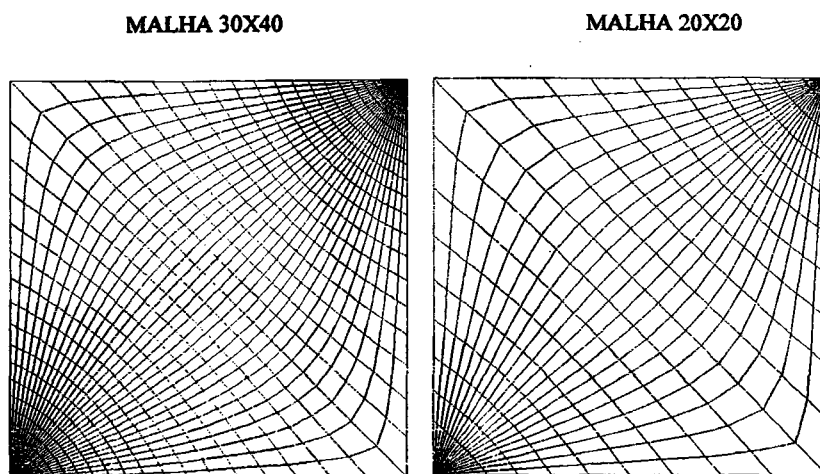
de CPU é extremamente dependente dos parâmetros de controle. E como já foi citado anteriormente, os casos com malha mais refinada utilizaram parâmetros mais rigorosos por causa das limitações de passo de tempo do IMPES. Isto explica a enorme diferença entre os tempos de CPU dos casos com malha grosseira e malha refinada. Portanto, nos casos que se seguem não mais faremos análise de tempo de CPU.

**Tabela V - Tempos de CPU**

	Upwind 10 x 10	TVD 10 x 10	Upwind 30x30
M = 1	53,07 s	59,16 s	2394,42 s
M = 10	40,82 s	43,05 s	2031,44 s
M = 50	17,94 s	23,43 s	743,76 s

### 5.3.2 - Malha Generalizada

Neste caso utiliza-se o problema do item 5.2.2, apenas com as modificações nos parâmetros de controle de passo de tempo utilizadas no item 5.3.1. As duas malhas utilizadas



**Figura 24 - Malhas generalizadas, configuração "five-spot"**

neste item são mostradas na Fig. 24.

As Figs 26 a 28 mostram as curvas de corte de de água para os casos TVD e upwind,

com  $M=1$ , 10 e 50, respectivamente.

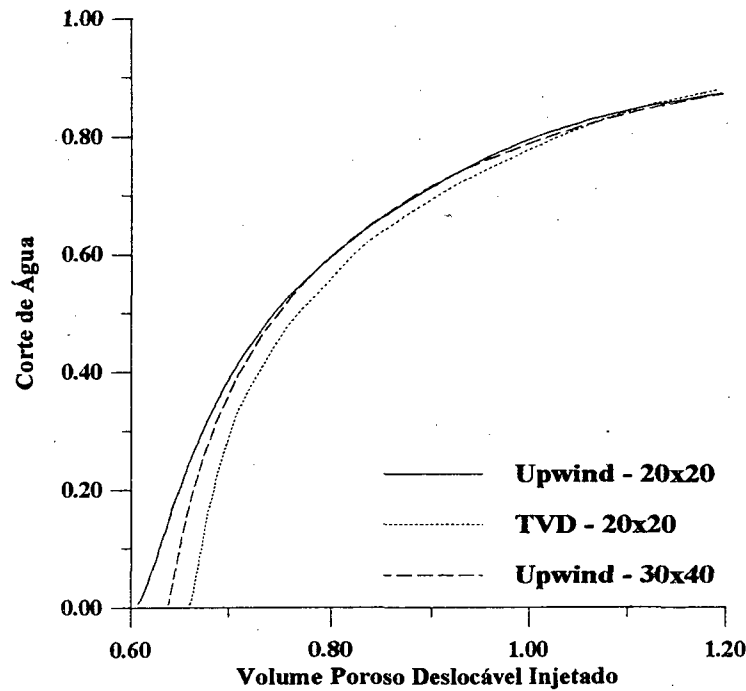


Figura 25 - Comparação entre métodos de interpolação, malha generalizada e  $M=1$ .

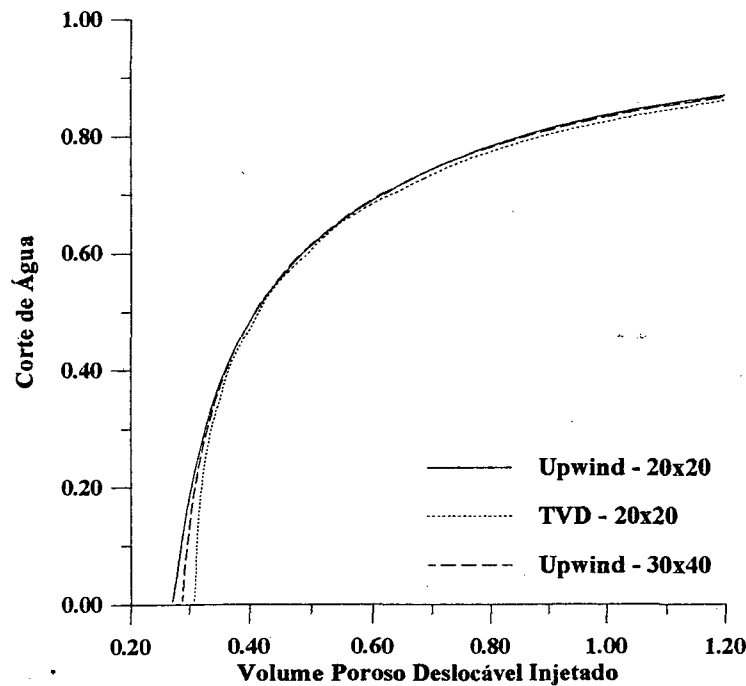
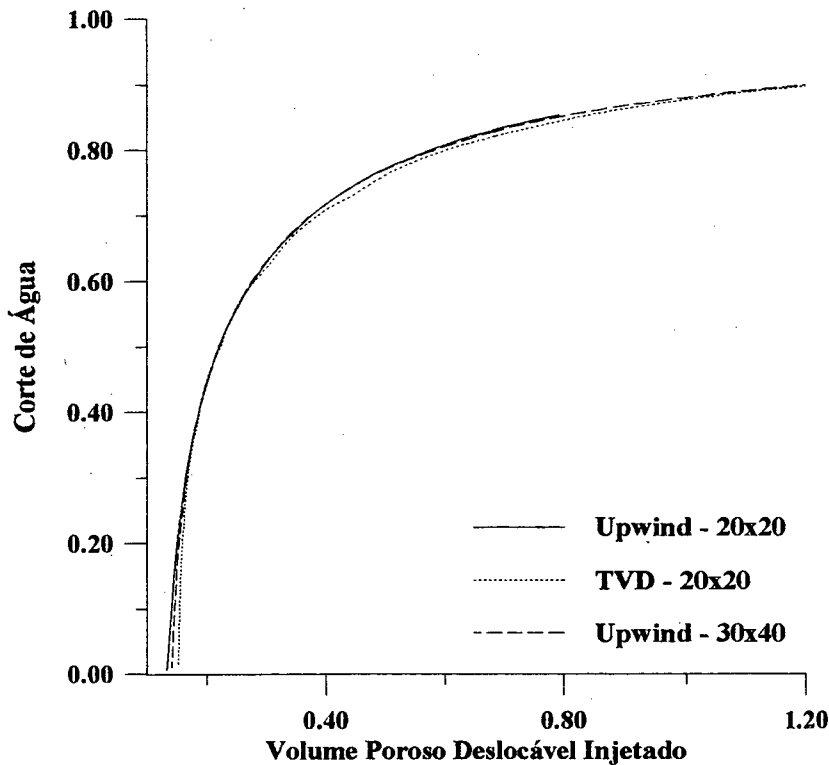


Figura 26 - Comparação entre métodos de interpolação, malha generalizada e  $M=10$ .



**Figura 27** - Comparação entre métodos de interpolação, malha generalizada e  $M=50$ .

Nas Figs. 25 a 27 pode-se observar que o caso com malha 20x20 e interpolação TVD apresenta resultados superiores àqueles com malha 30x40, pois há irrupção prematura para os casos upwind.

A Fig. 28 mostra os campos de saturação para  $VPI = 0,2$ . Estes campos evidenciam que para a mesma malha o esquema TVD tem melhor desempenho, ou seja, verifica-se menor dispersão da frente. Na comparação entre os resultados com interpolação TVD e upwind (malha 30x40), vê-se que a largura da frente do caso TVD é ligeiramente inferior. Ou seja, neste caso a interpolação TVD produz um resultado superior utilizando três vezes menos volumes. Deve-se notar também que a frente do caso TVD apresenta maior dispersão nas regiões próximas à fronteira, causando um achatamento na sua forma. Isto acontece porque o TVD só é utilizado quando se tem no mínimo dois volumes a montante e uma a jusante do volume onde se está calculando as propriedades nas faces. Nos volumes próximos à fronteira onde não é possível utilizar o TVD, utiliza-se esquema upwind.

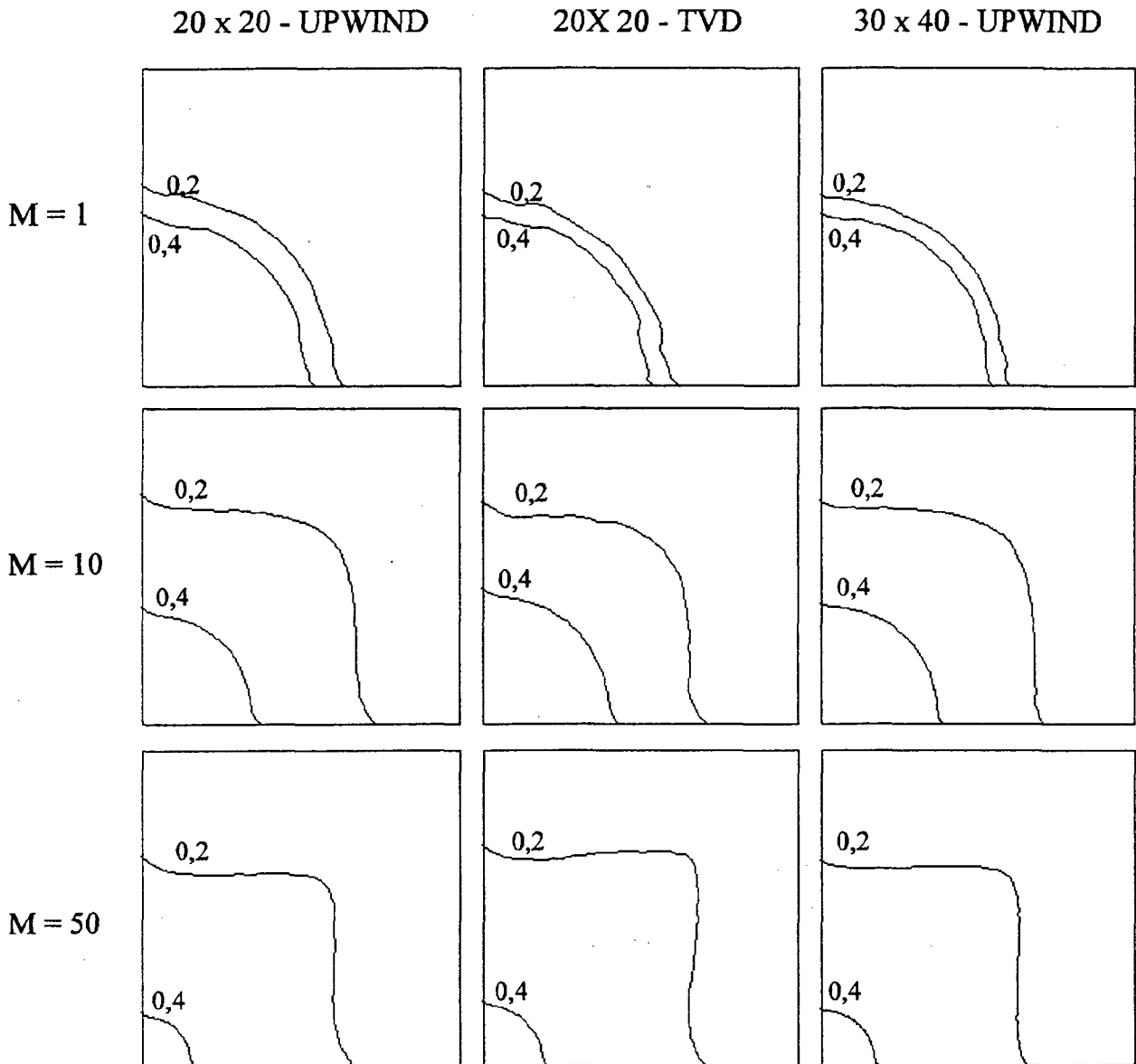


Figura 28 - Isolinhas de saturação em VPI = 0,2 , malha generalizada.

### 5.3.3 - Deslocamento Tipo Pistão

Embora o escoamento tipo pistão não se assemelhe ao escoamento dos fluidos presentes num reservatório de petróleo, este tipo de escoamento é bastante estudado devido às suas peculiaridades físicas e dificuldades numéricas.

Um deslocamento é do tipo pistão se antes da irrupção o valor da *saturação média da água atrás da frente* ( $S_{wb}$ ) corresponder à *saturação final da água* ( $S_{wf} = 1 - S_{or}$ ). Segundo Welge [52],  $S_{wb}$  é o valor onde a tangente à curva de fluxo fracionário, partindo de saturação irreduzível da água ( $S_{wirr}$ ), intersecta a reta  $f_w = 1$ .

O deslocamento tipo pistão é, como definido anteriormente, caracterizado através do fluxo fracionário da água ( $f_w$ ), que por sua vez, é definido como a razão entre a vazão de água e a vazão total (água + óleo). Desprezando-se o efeito de compressibilidade, pode-se calcular o fluxo fracionário da água através da seguinte equação,

$$f_w = \frac{\hat{q}_w}{\hat{q}_w + \hat{q}_o} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{\mu_o} \frac{k_{ro}}{k_{rw}}} \quad (158)$$

Uma vez conhecido o fluxo fracionário as permeabilidades relativas são dadas por,

$$k_{rw} = \frac{f_w}{M(1-f_w) + f_w} \quad (159)$$

$$k_{ro} = 1 - k_{rw}$$

A Fig. 29 mostra duas curvas de fluxo fracionário, segundo a definição anteriormente descrita, só a curva (b) pode levar a um deslocamento tipo pistão. Várias curvas de fluxo fracionário podem ser usadas na simulação numérica de deslocamentos tipo pistão, entretanto as mais utilizadas são  $f_w = S_w^2$  e  $f_w = S_w$ .

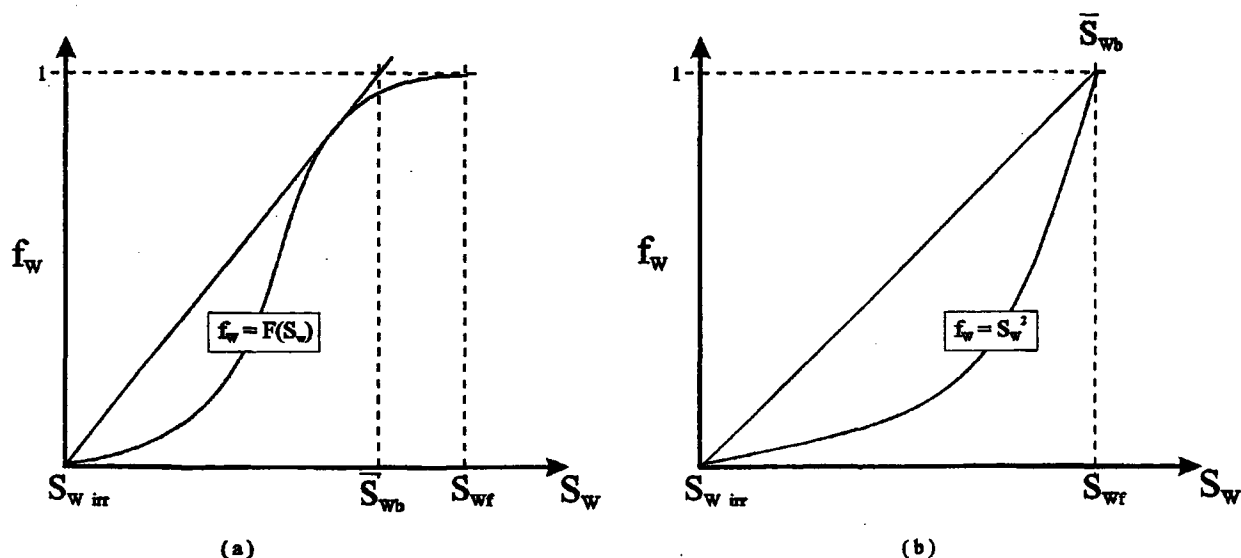


Figura 29 - Curvas de fluxo fracionário.

Yanosik e McCracken [14] estudaram o efeito de orientação de malha em deslocamentos tipo pistão numa configuração cinco poços e demonstraram que os simuladores baseados em

esquemas de cinco pontos não prevêm corretamente o desempenho do reservatório e o deslocamento da frente. Eles conseguiram demonstrar que há pouco efeito de orientação de malha quando se utiliza esquema de nove pontos. Entretanto nada foi investigado a respeito do efeito do refinamento de malha.

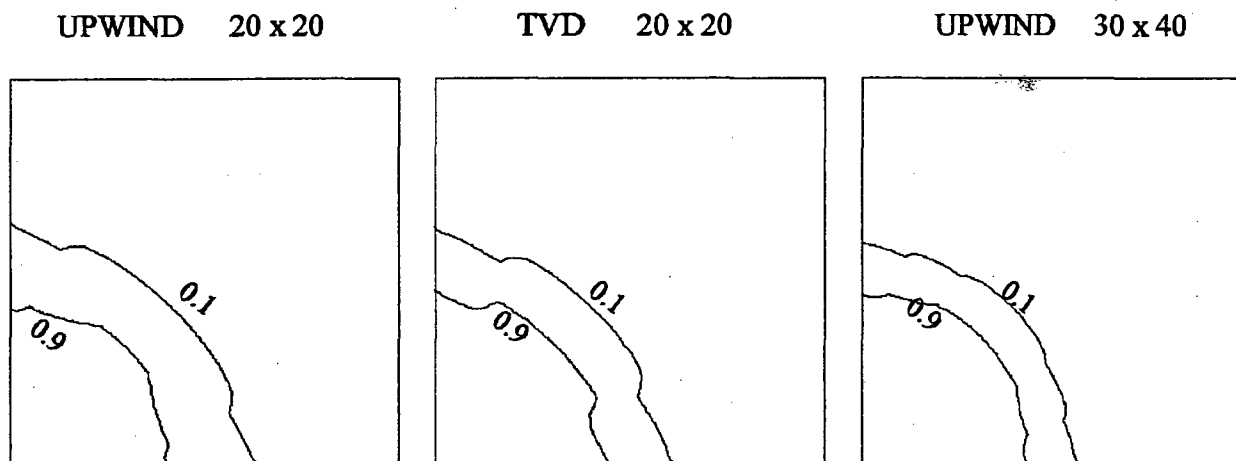
Embora Fleming [53] não discuta o efeito do refinamento de malha, os resultados para  $M = 40$  e esquema nove pontos mostram que o volume poroso de óleo recuperado e o tempo de irrupção diminuem com o refinamento de malha, exatamente o oposto ao observado em outros tipos de deslocamentos.

Brand et al [13] estudaram o efeito do refinamento de malha no deslocamento tipo pistão. Eles resolveram casos com  $M = 1, 2$  e  $10$ , utilizando malhas cartesianas diagonais variando entre  $10 \times 10$  e  $96 \times 96$ . Para  $M = 1$  eles observaram que com o refinamento de malha havia diminuição da largura da frente (diminuição da dispersão numérica) e que havia convergência para uma única solução onde a frente possuía forma circular, conforme obtido pela solução semi-analítica. Para  $M = 2$  a solução convergiu para algumas regiões, mas com a malha mais refinada houve aparecimento de "dedos" numéricos na direção diagonal à malha. Este "dedos" se tornaram mais pronunciados ainda para  $M = 10$ , sendo notado o aparecimento de "dedos" em forma de "chifre" quando se utilizou a malha mais refinada.

Palagi [51] utilizando malhas de Voronoi hexagonal-híbrida (malha cilíndrica numa região em volta dos poços e blocos hexagonais no restante do reservatório) investigou o efeito de refinamento de malha. Ele comprovou que o resultado é bastante sensível ao tamanho da malha, e que embora o efeito de orientação de malha tivesse sido bem reduzido, isto não foi suficiente para que a solução convergisse quando se aumentou o número de blocos.

Pinto [38] em sua dissertação de mestrado, resolveu este tipo de escoamento utilizando esquema TVD em coordenadas cartesianas, para razões de viscosidades entre  $1$  e  $40$ , e demonstrou que o efeito de orientação de malha é bastante reduzido com o uso deste esquema de interpolação. Entretanto não feito nenhum estudo do efeito do tamanho da malha utilizando TVD ou qualquer outro método.

O propósito deste item é avaliar o efeito do tamanho do malha em um deslocamento tipo pistão, fazendo uso do esquema TVD em coordenadas generalizadas. O caso escolhido para realizar esta avaliação é o mesmo utilizado no item 5.2.2, sendo que as curvas de permeabilidades relativas utilizadas são as indicadas na Eq. 159 com  $f_w = S_w^2$ . Serão mostrados casos com  $M = 1$  e  $10$  com malhas em coordenadas generalizadas entre  $20 \times 20$  e  $41 \times 60$ .



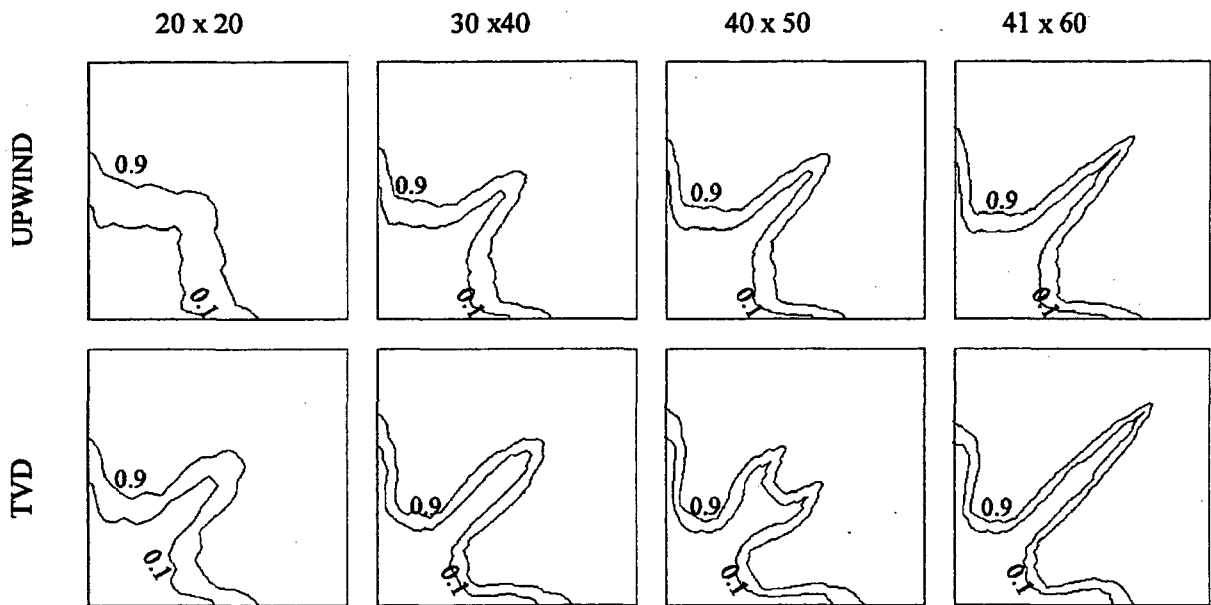
**Figura 30** - Isolinhas de saturação em  $VPI = 0,2$ , tipo pistão ( $f_w = S_w^2$ ) e  $M=1$ .

Na Fig. 30 pode-se observar que para  $M = 1$  o comportamento é semelhante ao observado por Brand et al [13], ou seja, a solução tende a convergência com o refinamento da malha. Além disso, com o uso do esquema TVD obteve-se uma solução para a malha mais grosseira mais próxima daquela obtida com malha mais refinada e esquema upwind, com já era esperado.

Já para os casos com  $M = 10$ , observa-se através da Fig. 31 que o resultado não converge para uma mesma solução com o refinamento de malha, nem tão pouco com a utilização de um esquema de ordem mais alta. Além disso, como já foi observado por [13] há formação de dedos mais longos com o aumento do número de pontos e com a utilização do esquema TVD. É interessante notar que embora o TVD consiga reduzir a largura da frente (dispersão numérica), as soluções obtidas com este tipo de interpolação não se assemelham àquelas obtidas via upwind. O caso mais extremo de não semelhança aconteceu para a malha  $40 \times 50$ , neste caso houve formação de "chifres" anteriormente observados por Yanosik e McCracken [14] para  $M = 50$  e malha paralela.

Os resultados apresentados neste item demonstram que o uso do TVD, consegue reduzir a dispersão numérica, entretanto, como se sabe esta dispersão é responsável pela amortecimento das instabilidades que provocam o aparecimento dos "dedos" viscosos. Isto pode explicar a maior instabilidade da solução de problemas com deslocamento tipo pistão, utilizando método de interpolação TVD.





**Figura 31** - Isolinhas de saturação em  $VPI = 0,2$ , tipo pistão (  $f_w = S_w^2$  ) e  $M=10$ .

## 5.4 - Grupo C - Geometria Irregular

Neste grupo, como já foi mencionado nas preliminares deste capítulo, são resolvidos casos com geometria irregular e vários poços. Com isso tenta-se avaliar a interpolação TVD para casos mais próximos da realidade da Engenharia de Petróleo. Para tanto são rodados casos com e sem falha geológica. Cada um dos casos é resolvido utilizando duas malhas: uma mais grosseira contendo 19 volumes na direção  $\xi$  e 10 volumes na direção  $\eta$  ( $19 \times 10$ ) e outra mais refinada ( $50 \times 19$ ). A malha grosseira foi escolhida arbitrariamente, já a malha refinada foi escolhida através de testes utilizando interpolação upwind e três malhas:  $50 \times 19$ ,  $40 \times 14$  e  $19 \times 10$ . Os resultados mostraram que na maioria dos poços a produção de óleo calculada utilizando a malha  $19 \times 10$  era muito distante daquela utilizando malha  $40 \times 14$ ; já a produção calculada com a malha  $40 \times 14$  estava bem próxima daquela calculada com malha  $50 \times 19$ . Com isso evitou-se utilizar uma malha com muitos pontos, já que esta demandaria muito esforço computacional para resolver o problema, e garantiu-se que a malha  $50 \times 19$  poderia ser utilizada como referência na comparação direta entre os métodos TVD e upwind.

### 5.4.1. Grupo C - Caso 1 - Geometria Irregular com Falha Geológica

Este problema consiste na injeção de água em um reservatório irregular falhado, homogêneo e isotrópico. A geometria do reservatório bem como a localização dos poços e da falha geológica são mostradas na Fig. 32, onde as dimensões são dadas em metros. A Tabela VI mostra as coordenadas dos poços e suas vazões iniciais. O reservatório tem 15 metros de profundidade (49,21 pés). A porosidade da rocha é 0,30 e a permeabilidade absoluta  $0,2961 \mu\text{m}^2$  (300 mD). Os poços têm 0,0984 m (0,3 ft) de raio e os raios equivalentes de poço utilizados no modelo de poço são calculados via Eq. (132).

Os volumes de formação da água e do óleo são calculados utilizando a Eq. (13) sendo as compressibilidades das duas fases iguais a  $7,2527 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  ( $5,0 \cdot 10^{-8} \text{ psi}^{-1}$ ).

As viscosidades da água e do óleo são calculadas através da Eq. (160), onde as pressões são dadas em Pa e as viscosidades em Pa.s.

$$\mu_o = 11,63 \cdot 10^{-3} [ 1 + 1,1451 \cdot 10^{-12} (P - 13,788 \cdot 10^6) ] \quad (160)$$

$$\mu_w = 1,00 \cdot 10^{-3} [ 1 + 1,1451 \cdot 10^{-12} (P - 13,788 \cdot 10^6) ]$$

As curvas de permeabilidade relativa da fases água e óleo são dadas por,

$$k_{rw} = (S - 0,2)(-250S^2 + 325S - 55)/27 \quad (161)$$

$$k_{ro} = 1 - k_{rw}$$

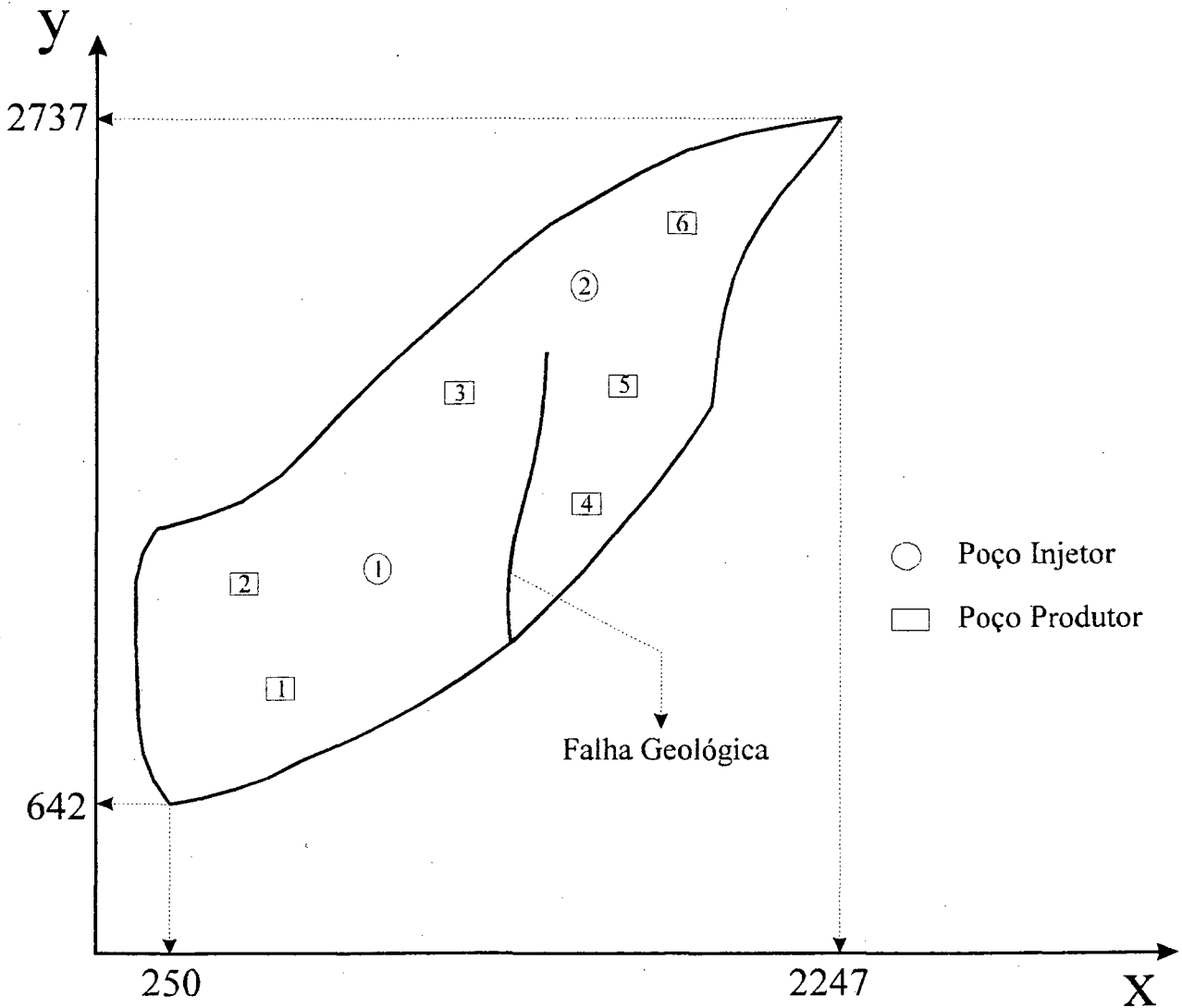


Figura 32 - Contorno do reservatório e localização dos poços

**Tabela VI** - Coordenadas e Vazões Iniciais dos Poços

	X [m]	Y [m]	Q [m <sup>3</sup> /s]
Poço Inj. no. 1	906	1343	2,9424 10 <sup>-3</sup>
Poço Inj. no. 2	1468	2218	2,0392 10 <sup>-3</sup>
Poço Prod. no. 1	593	1031	9,1997 10 <sup>-4</sup>
Poço Prod. no. 2	406	1281	1,1039 10 <sup>-3</sup>
Poço Prod. no. 3	1093	1843	9,1997 10 <sup>-4</sup>
Poço Prod. no. 4	1468	1531	5,5198 10 <sup>-4</sup>
Poço Prod. no. 5	1593	1906	7,3597 10 <sup>-4</sup>
Poço Prod. no. 6	1781	2468	7,3597 10 <sup>-4</sup>

A Fig. 33 mostra as duas malhas utilizadas neste grupo. A malha 19 x 10 é utilizada para os casos com interpolação upwind e TVD, enquanto a malha mais refinada só é utilizada para os casos com interpolação upwind.

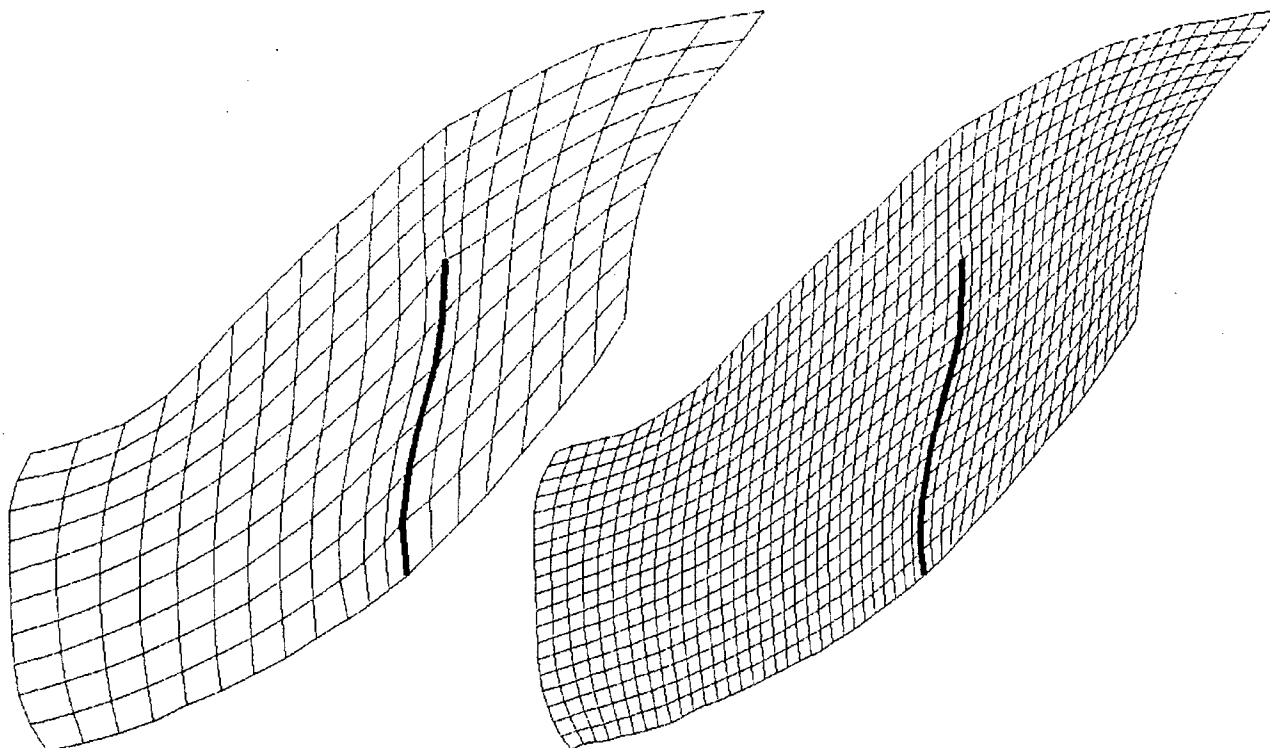
Os dados complementares necessários para simular os casos com geometria irregular estão contidos na Tabela VII. A única diferença existente entre os casos com malha refinada e malha grosseira está na utilização de valores distintos de  $\Delta t$  máximo. Para o caso com malha 50 x 19 foi utilizado um valor de  $\Delta t$  máximo dez vezes menor.

Devido a grande quantidade de poços produtores (seis no total), neste capítulo serão utilizados na comparação dos métodos apenas os gráficos de volume poroso de óleo recuperado. Os gráficos de corte de água e pressão de fundo de poço serão apresentados, apenas para o caso upwind com malha refinada, para que se tenha uma idéia do comportamento de cada poço.

As Figs. 34 a 39 mostram os gráficos VPOR x VPI dos poços 1 a 6 respectivamente. É interessante notar que do poço 1 ao 3 o desempenho do TVD foi idêntico ou até mesmo inferior àquele apresentado pelo esquema upwind. Já do poço 4 ao 6 o esquema TVD obteve desempenho superior. Isto poderia indicar algum erro na implementação do método TVD para o fluxo no sentido positivo ou negativo do eixos coordenados. Entretanto foram realizados vários testes com localizações de poços injetores e produtores diferentes que não confirmaram esta hipótese.

MALHA 19 x 10

MALHA 50 x 19

**Figura 33** - Malhas 19x10 e 50x19 - Contorno irregular**Tabela VII** - Dados Complementares - Grupo C

Pressão Inicial	24129 kPa (3500 psi)
Saturação Inicial	0,2
Pressão Máx. de Injeção	55152 kPa ( 8000 psi)
Pressão Mín. de Fundo	344,7 kPa (50 psi)
Var. Máx. da Sat. na Iter.	0,02
Var. Máx. da Pressão na Iter.	137,9 kPa (20 psi)
$\Delta t$ máximo (malha 19 x 10)	15 dias
$\Delta t$ máximo (malha 50 x 19)	1,5 dias
$\Delta t$ mínimo	$1 \cdot 10^{-9}$ dia
TOL	$1 \cdot 10^{-4}$

O melhor resultado obtido com a utilização da interpolação TVD se verificou no poço produtor 4 (Vide Fig. 38). Este resultado praticamente coincide com aquele obtido com malha 50 x 19 e esquema upwind. Já nos poços 2 e 3 (Figs. 35 e 36) o esquema TVD apresentou os piores resultados, ficando a produção de óleo calculada por este método abaixo daquela obtida via upwind. Outro fato interessante a ser destacado é o resultado do método upwind (19x10) no poço 3. Neste poço a produção de óleo calculada utilizando esquema upwind com malha grosseira é praticamente igual àquela calculada com o malha refinada.

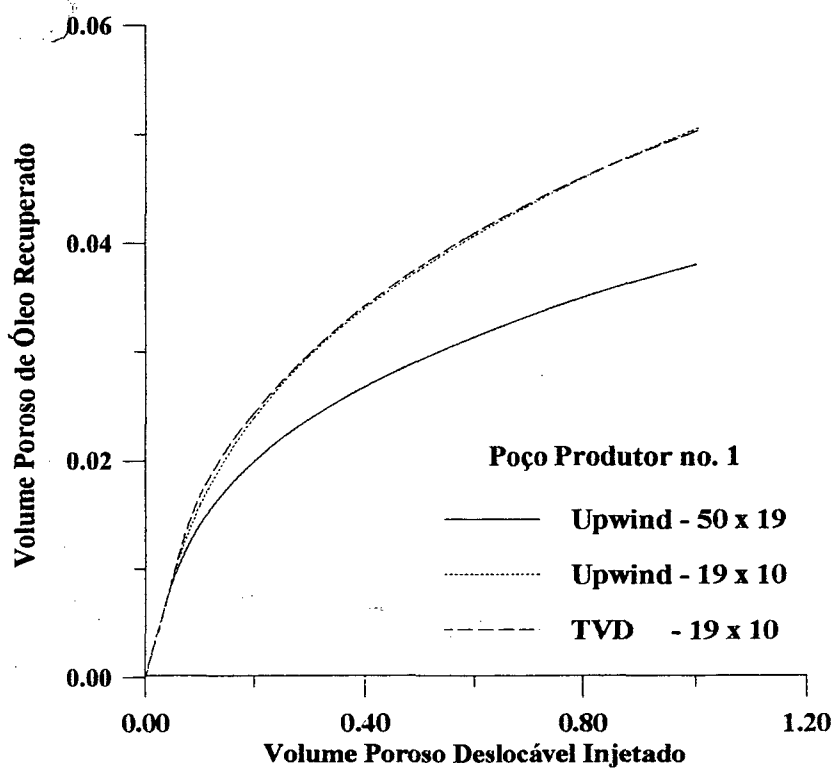


Figura 34 - Poço 1 - Reservatório com falha

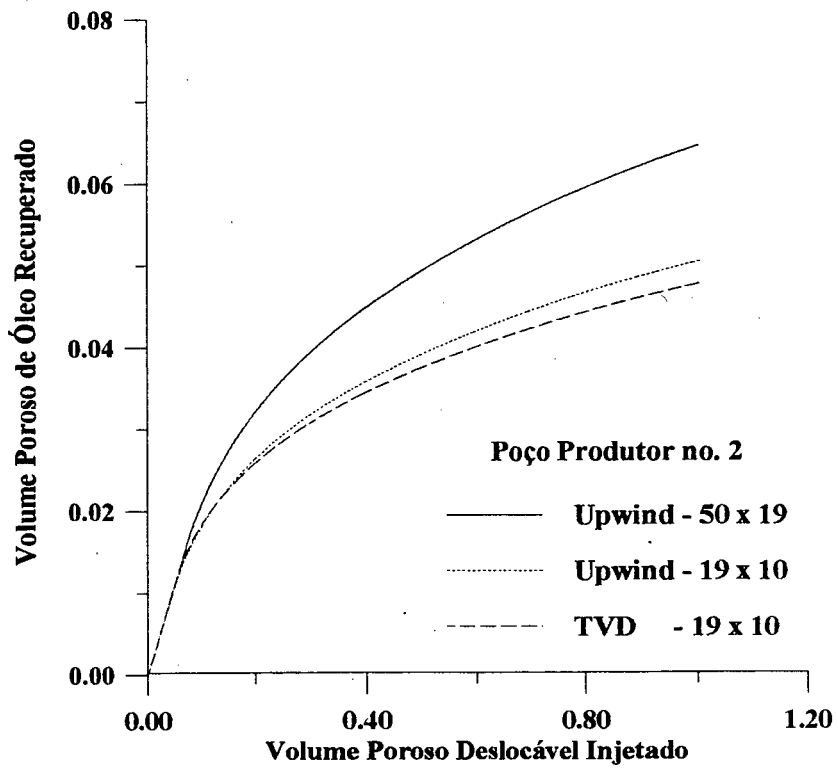


Figura 35 - Poço 2 - Reservatório com falha

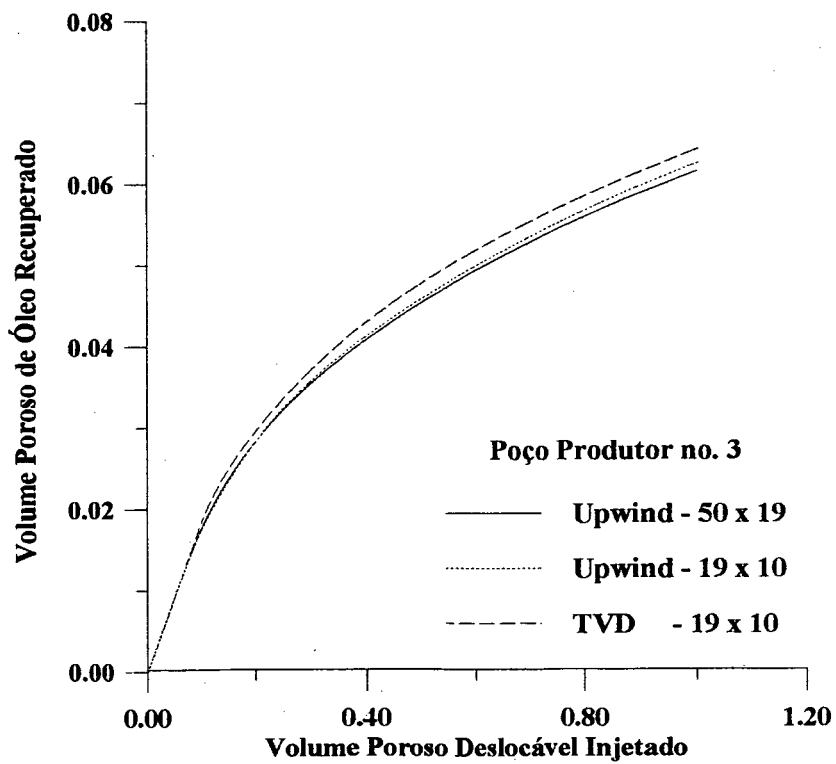


Figura 36 - Poço 3 - Reservatório com falha

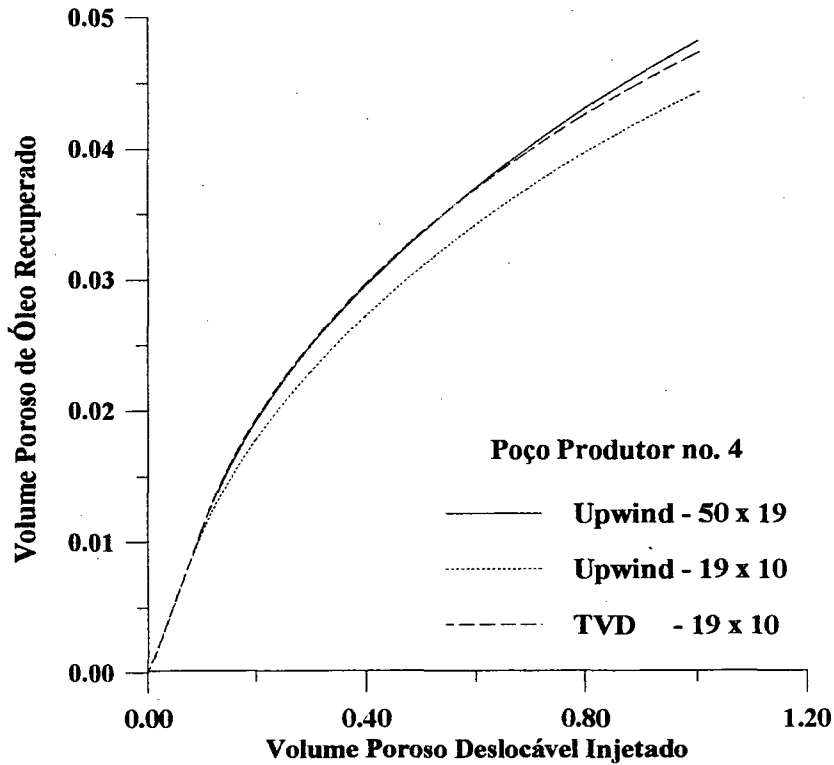


Figura 37 - Poço 4 - Reservatório com falha

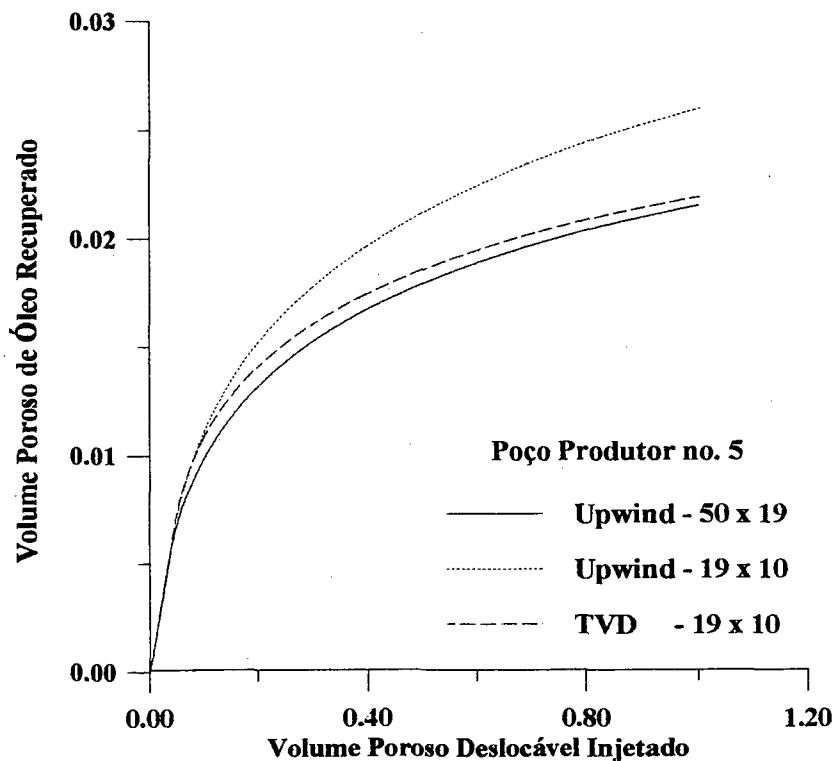
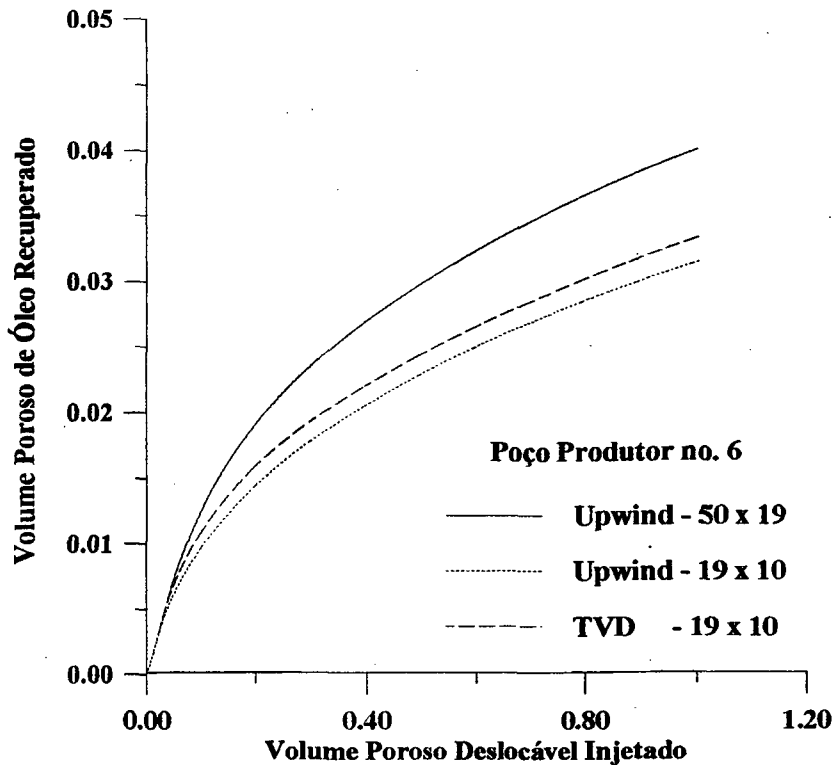


Figura 38 - Poço 5 - Reservatório com falha

A Fig. 40 apresenta o gráfico VPOR x VPI da produção total do reservatório com falha para os casos com interpolação upwind, utilizando as malhas 50 x 19 e 19 x 10; e para o caso





**Figura 39 - Poço 6 - Reservatório com falha**

com TVD e malha 19 x 10. Pode-se observar neste gráfico que a interpolação TVD apresenta praticamente a mesma produção de óleo da interpolação upwind.

A Fig. 41 mostra os cortes de água dos seis poços produtores para o caso com malha refinada e interpolação upwind. Como se pode verificar, ocorre irrupção de água nos poços 5, 1 e 6 praticamente no mesmo instante. Em seguida, os poços 2 e 3 começam a produzir água e por último há irrupção no poço 4. Se fosse estabelecido algum critério de fechamento de poço a partir do corte de água, a ordem de fechamento seria 5, 1, 6, 2, 3 e 4. O poço que tem o maior corte de água é o poço 5 e o de menor corte é o poço 4. Embora o poço 4 tenha o menor corte de água ele é o segundo maior produtor de óleo. O poço com maior produção de óleo é o poço 3 (Vide Fig. 36), pois sua vazão de produção é maior que a do poço 4 (Vide Tab VI) e além disso ele produz óleo proveniente das duas frentes.

Foram realizados alguns testes comparativos entre a metodologia de cálculo do raio equivalente de poço proposta por Cunha e Maliska [44] e a exposta no Capítulo Quatro deste trabalho, e verificou-se que os raios equivalentes calculados para este reservatório são idênticos. Pode-se dizer então, que para os casos em que a malha não é muito distorcida, é mais vantajoso utilizar o raio equivalente de poço proposto por [44], pois o seu cálculo é mais simples.

A Fig. 42 traz a pressão de fundo de poço calculada através do modelo de poço descrito

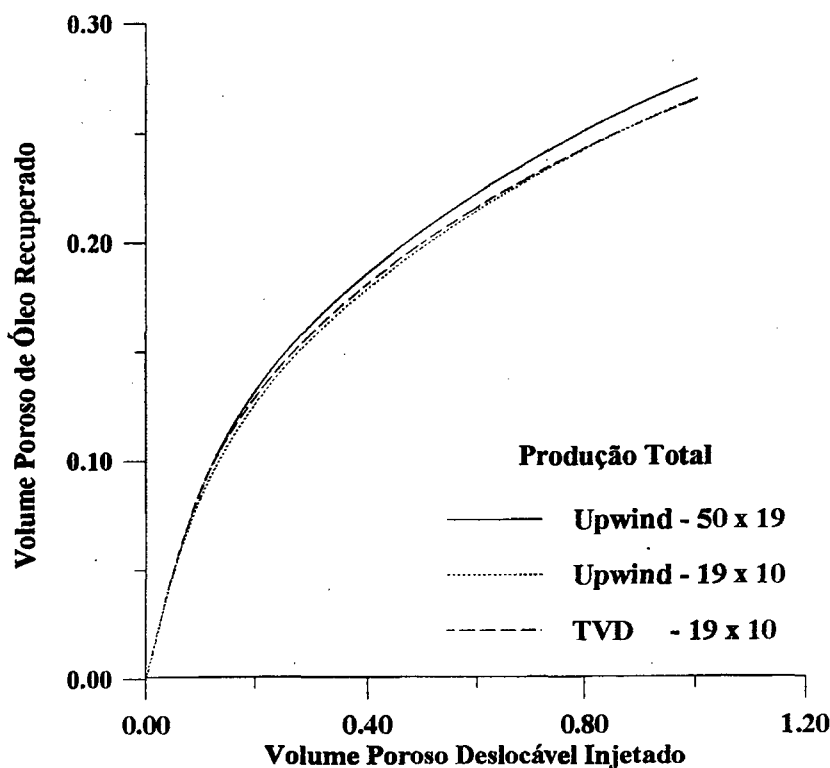


Figura 40 - Produção total - Reservatório com falha

no Capítulo Quatro. Todos os poços têm comportamento de pressão de fundo de poço semelhantes. Num primeiro instante há uma grande queda de pressão, seguida de uma recuperação e estabilização num determinado patamar de pressão. Esta queda de pressão ocorre instantaneamente assim que o poço começa a produzir. Já a recuperação ocorre até a chegada da frente neste poço. A estabilização se dá quando o corte de água não varia muito. Pode-se observar que os poços onde houve estabilização mais rápida são justamente aqueles onde há irrupção de água mais cedo (Vide Fig. 41).

A Fig. 43 mostra as isocurvas de saturação para  $VPI = 0,2$ . Pode-se observar que as frentes do caso TVD têm menor dispersão numérica (largura da frente) que no caso upwind e malha grosseira. Entretanto esta diferença é mais sensível para a frente do poço injetor 2, e como consequência os melhores resultados do esquema TVD são observados para os poços 4, 5 e 6, como já foi abordado anteriormente. De modo geral, pode-se dizer que a isocurva de saturação 0,6 do caso TVD se aproxima mais daquela do caso com malha refinada e esquema upwind, principalmente na região do poço injetor 2.

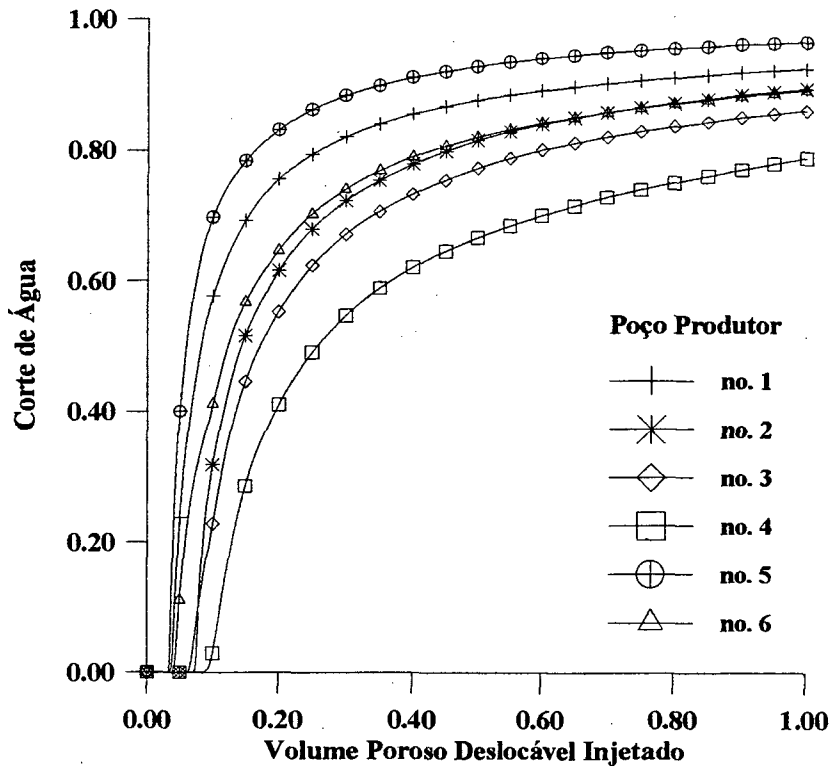


Figura 41 - Corte de água - Reservatório com falha

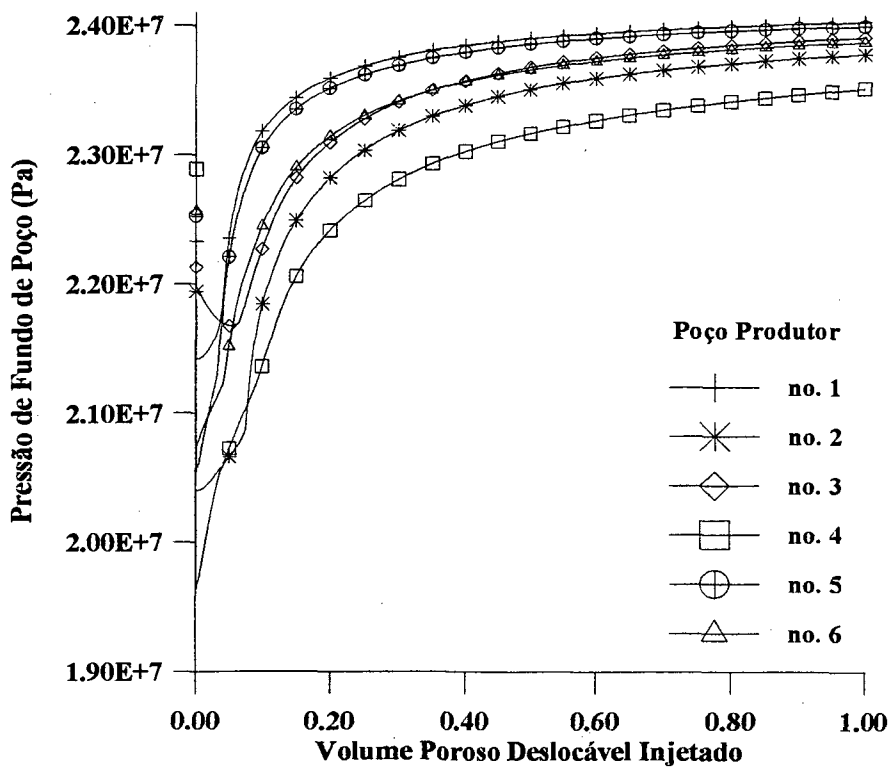
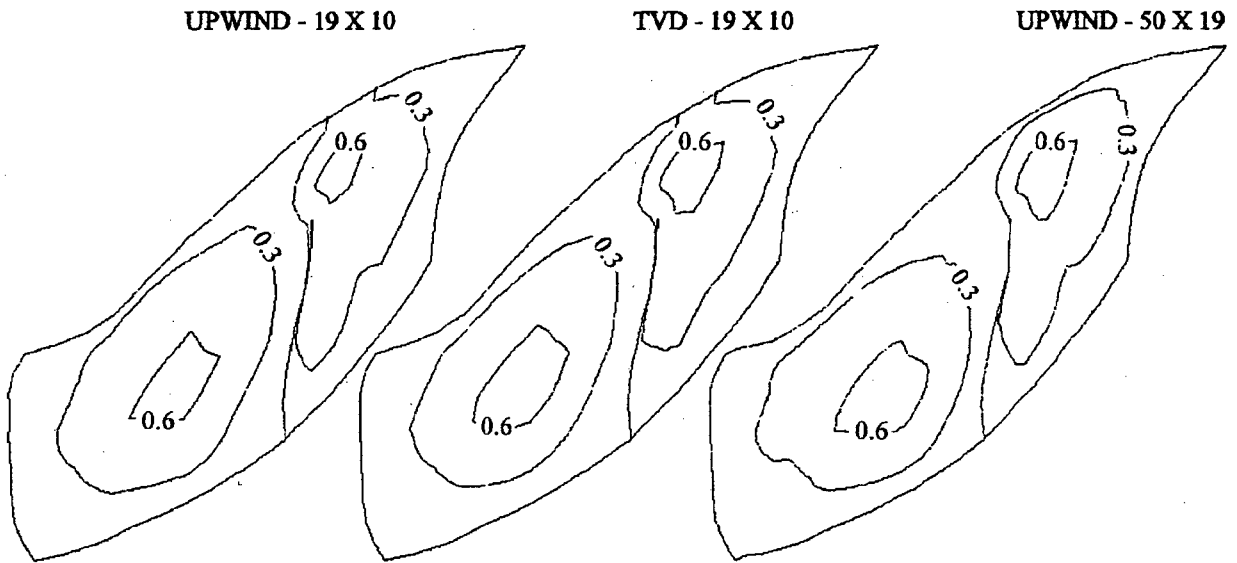
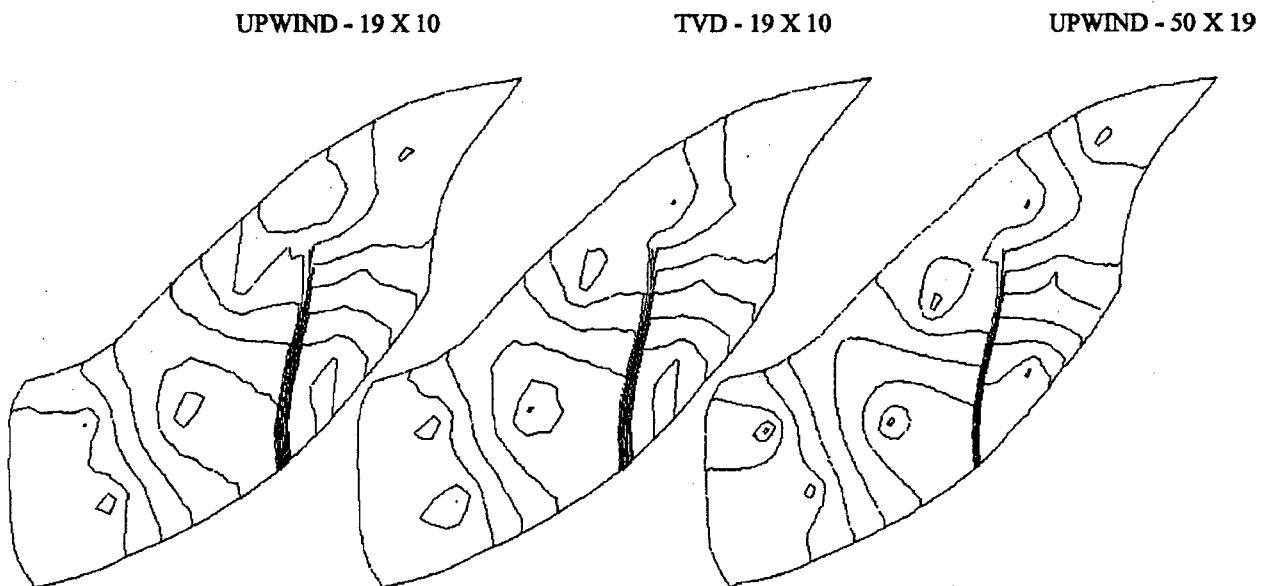


Figura 42 - Pressão de fundo de poço - Reservatório com falha

Observando-se a Fig. 42, que mostra as isocurvas de pressão para  $VPI=0,2$ , nota-se mais facilmente as regiões onde o esquema TVD se aproxima mais do caso refinado. Também se pode verificar que há um choque na região próxima à falha, fazendo surgir grandes gradientes de pressão.



**Figura 43** - Isocurvas de saturação em  $VPI=0,2$  , reservatório com falha



**Figura 44** - Isocurvas de pressão em  $VPI=0,2$  , reservatório com falha

#### 5.4.2. Grupo C - Caso 2 - Geometria Irregular sem Falha Geológica

Este item tem como objetivo demonstrar que a ausência da falha geológica melhora o desempenho do esquema TVD. Portanto, o problema utilizado neste caso é idêntico àquele apresentado no item anterior. As malhas utilizadas estão mostradas na Fig. 33 (excluindo-se a falha) e os dados complementares são os mesmos da Tab. VII.

As Figs. 45 a 50 trazem os gráficos de VPOR para os seis poços produtores. Cada gráfico apresenta os três casos utilizados na comparação, ou seja, interpolação upwind com malhas  $19 \times 10$  e  $50 \times 19$ , e interpolação TVD com malha  $19 \times 10$ . O comportamento do esquema TVD para o caso sem falha só se modifica para os poços 3 e 4, que neste caso têm, respectivamente, desempenho superior e levemente superior ao esquema upwind. Ao contrário do que foi observado para o caso com falha, não há nenhum poço onde o caso upwind com malha grosseira produzisse a mesma quantidade de óleo que o caso com malha refinada.

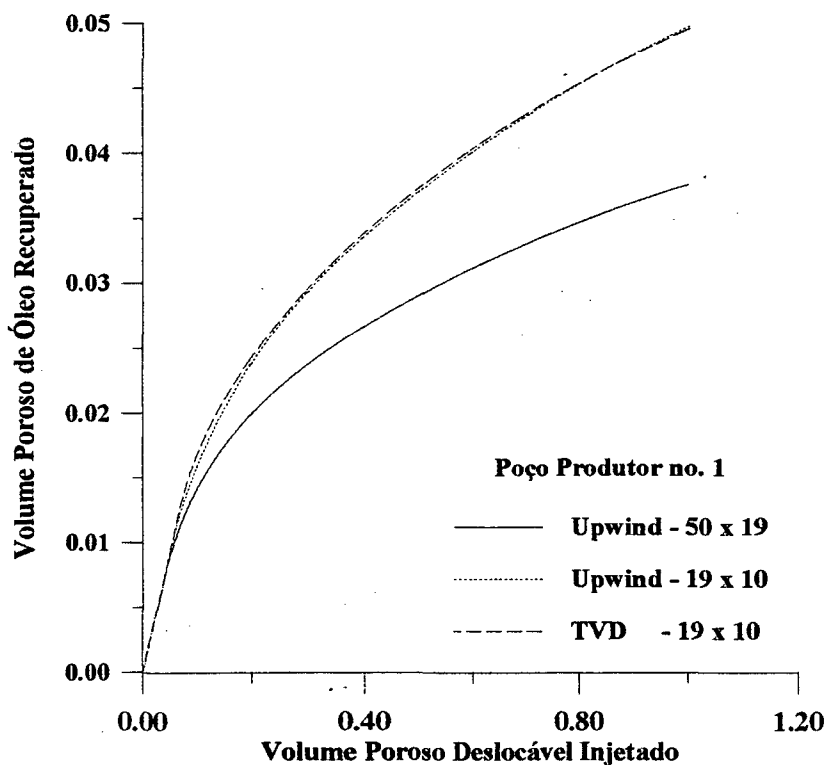


Figura 45 - Poço 1 - Reservatório sem falha

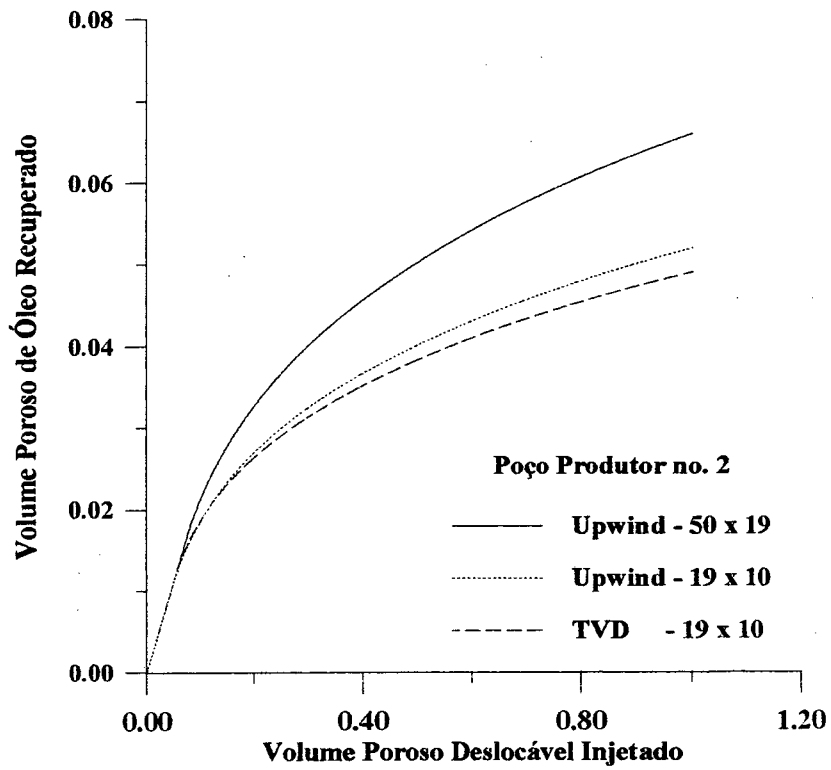


Figura 46 - Poço 2 - Reservatório sem falha

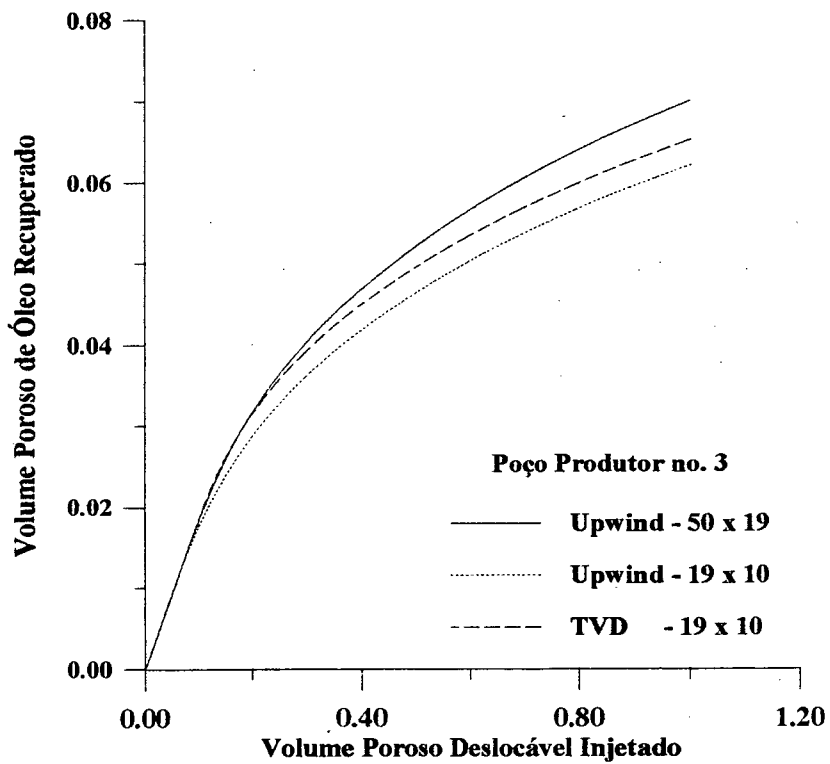


Figura 47 - Poço 3 - Reservatório sem falha

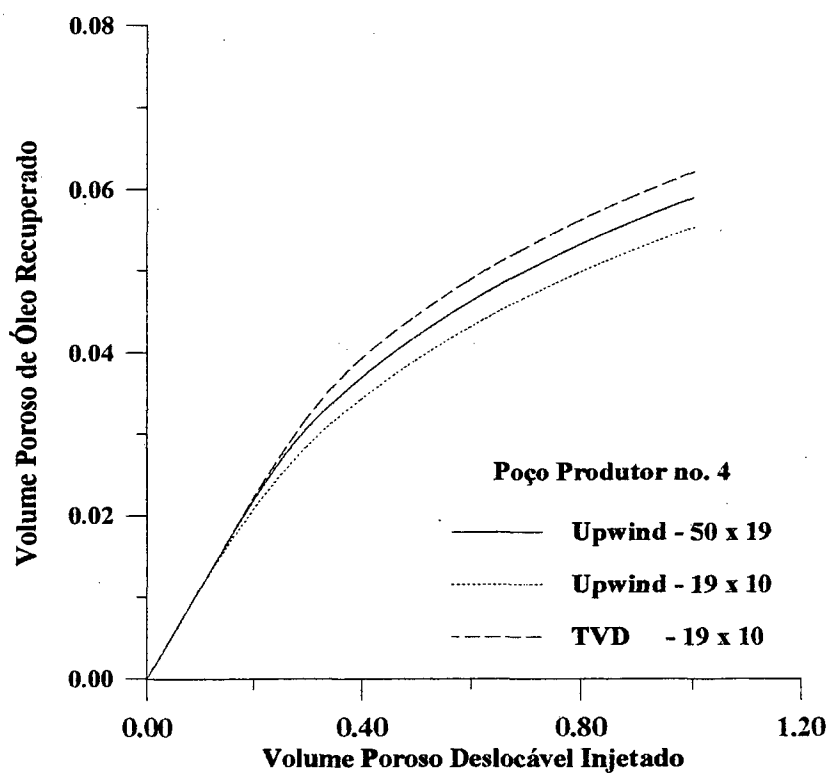


Figura 48 - Poço 4 - Reservatório sem falha

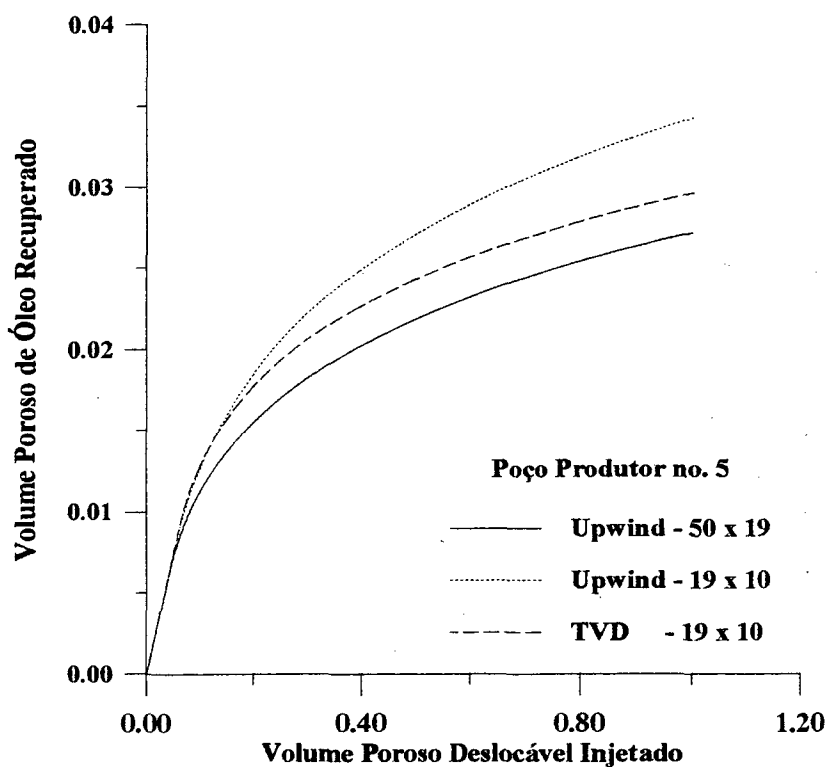


Figura 49 - Poço 5 - Reservatório sem falha

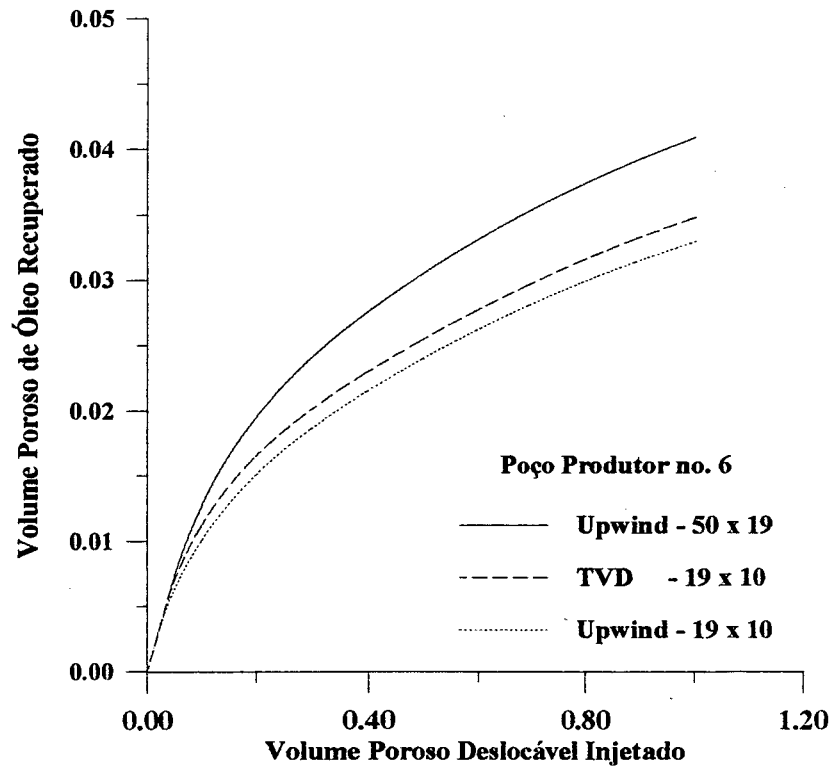


Figura 50 - Poço 6 - Reservatório sem falha

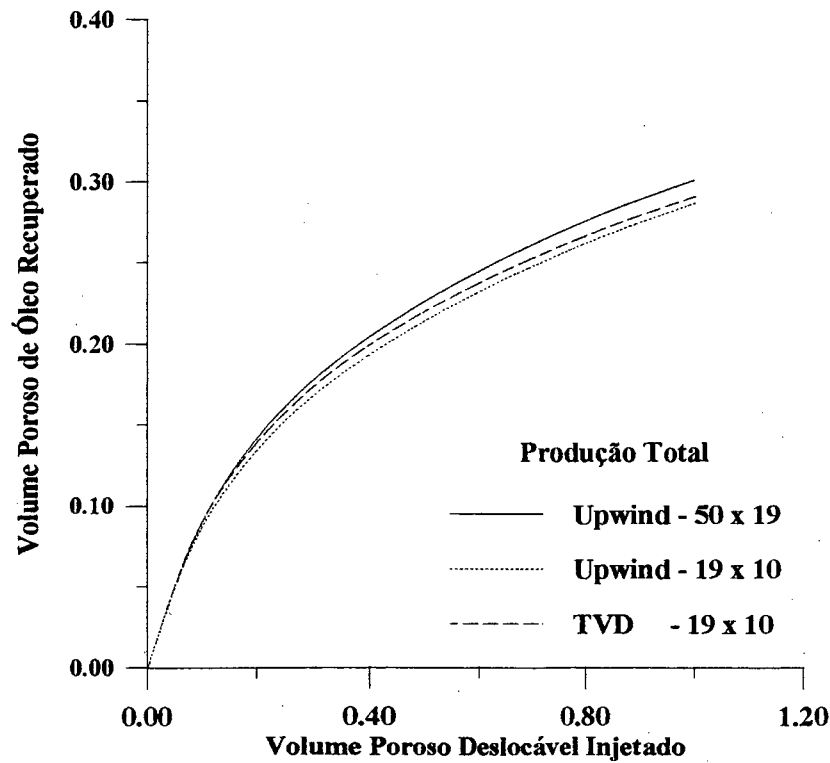
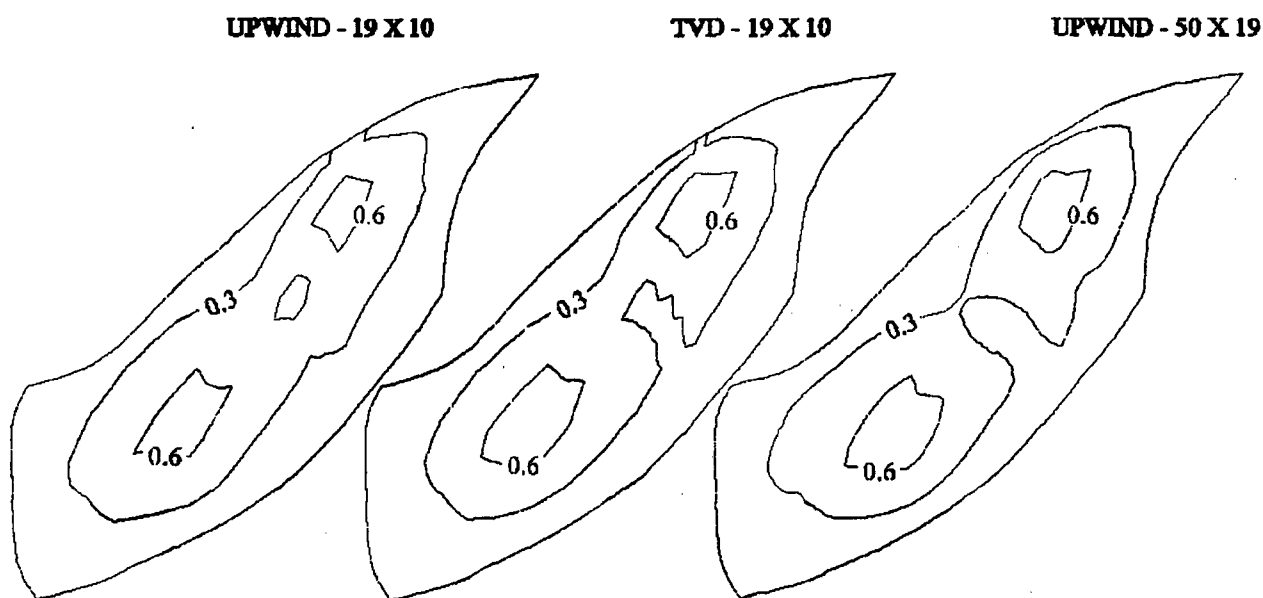


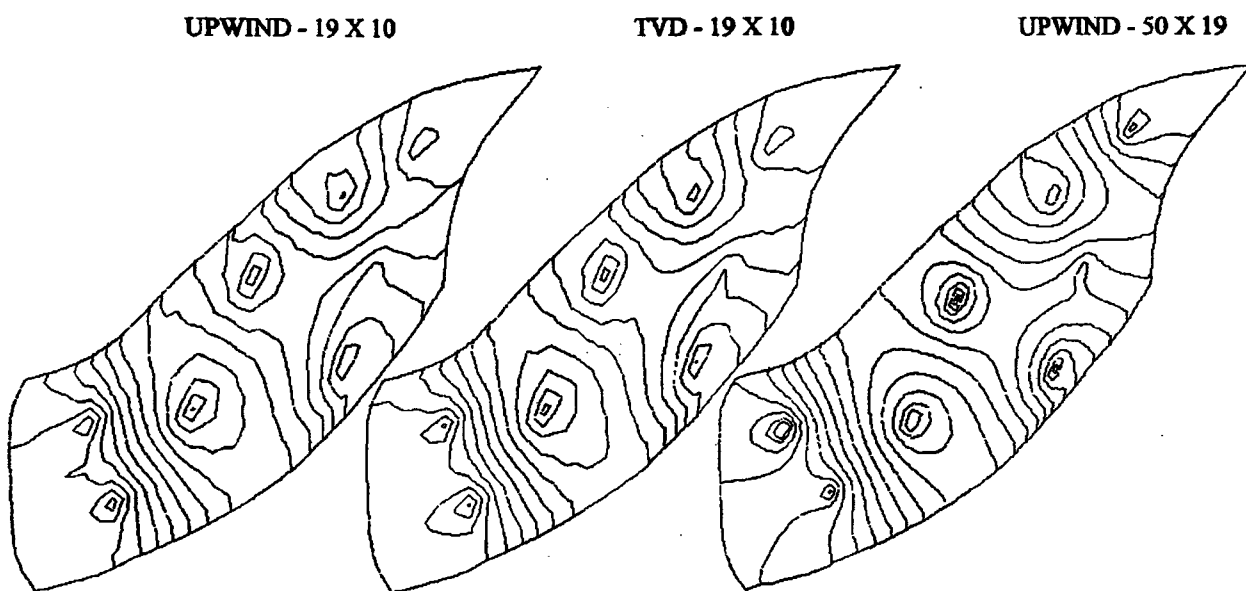
Figura 51 - Produção total - Reservatório sem falha



Com se pode observar na Fig. 51 o TVD tem desempenho superior ao caso com interpolação upwind com mesma malha, ou seja, a produção total de óleo para o caso com interpolação TVD está mais próxima do caso com interpolação upwind e malha 50 x 19. Entretanto a diferença entre os casos TVD e upwind não é tão expressiva quanto aquela apresentada nos casos com geometria "five-spot" do grupo anterior.



**Figura 52** - Campo de saturação em VPI = 0,2 - Reservatório sem falha



**Figura 53** - Campo de pressão em VPI=0,2 - Reservatório sem falha

Pode-se notar claramente pela Fig. 52 que as isocurvas de saturação do caso TVD são

muito semelhantes as isocurvas do caso upwind e malha 50 x 19. Para o caso upwind e malha 19 x 10 as frentes estão bem adiantadas, tendo inclusive se encontrado em uma área bem maior que nos outros dois casos. Os campos de pressão mostrados na Fig. 53 também indicam, em algumas regiões, semelhança entre o caso TVD e o caso upwind com malha refinada.

As curvas de corte de água (Vide Fig. 54) para o caso sem falha mantém as mesmas características daquelas apresentadas para o caso com falha. A diferença entre os dois casos está na curva do poço 4, que tem irrupção mais tardia e produz menos água. As curvas de pressão de fundo de poço, mostradas na Fig. 55, também apresentam comportamento idêntico daquelas apresentadas na Fig. 42. Neste caso as curvas dos poços 3, 4 e 6 têm queda de pressão menores.

Comparando-se os resultados deste item e o do item anterior, pode-se dizer que o uso do esquema TVD nas permeabilidades relativas em problemas com muitos poços e falhas geológicas apresenta problemas e deve ser mais investigado.

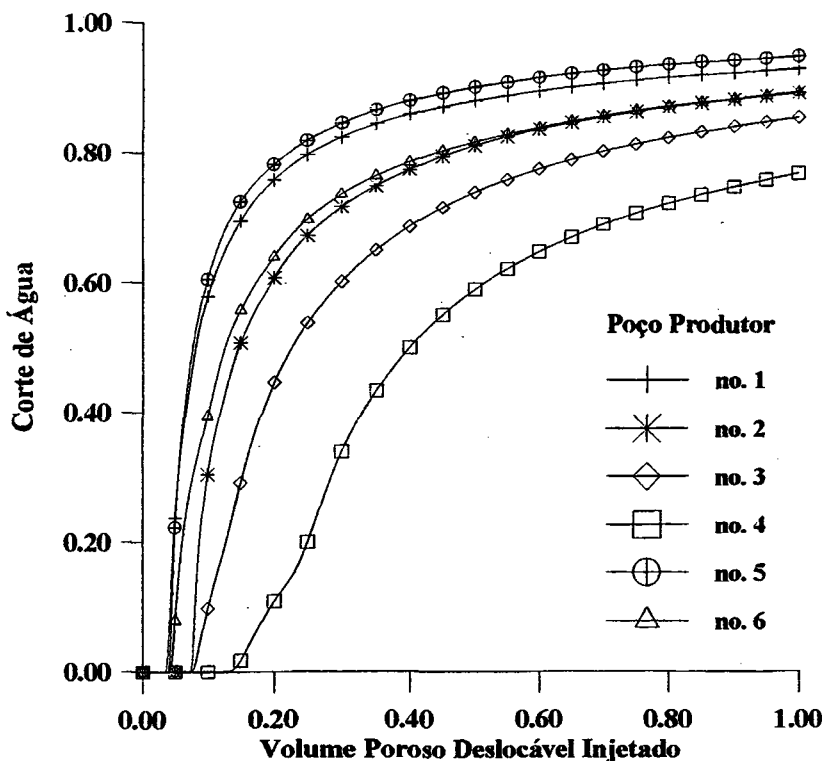


Figura 54 - Corte de água - Reservatório sem falha

Os resultados apresentados no item anterior mostraram que o uso do esquema TVD nas

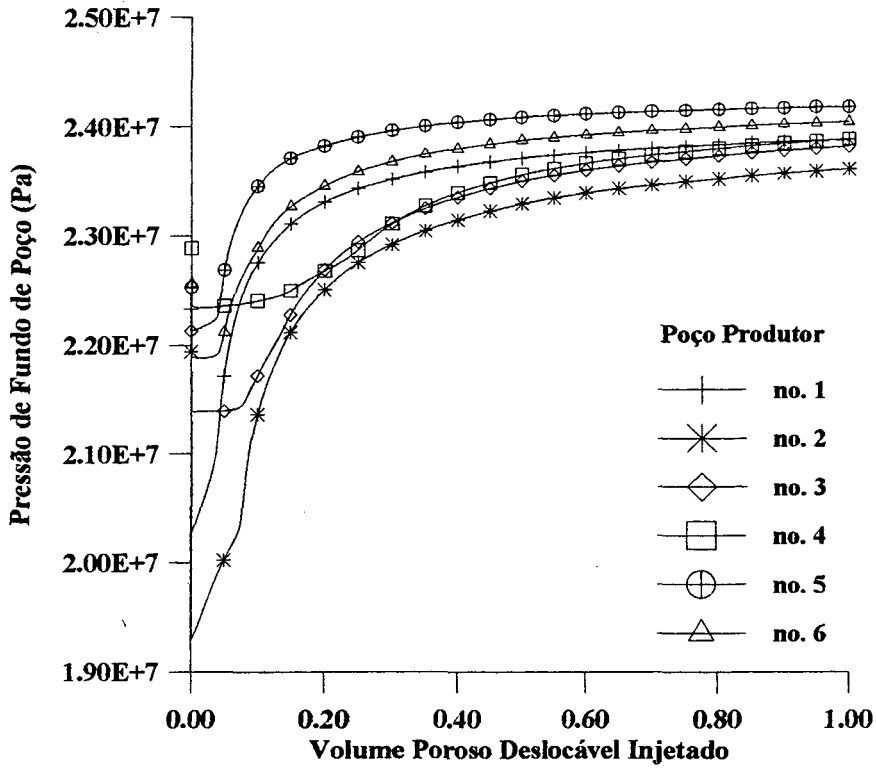


Figura 55 - Pressão de fundo de poço - Reservatório sem falha

permeabilidades relativa não difere muito da interpolação tradicional, quando se tem muitos poços e falha geológica, entretanto o mesmo não acontece quando o reservatório não é falhado. Estes resultados parecem indicar que a hipótese simplificativa utilizada na aplicação do esquema TVD

nas permeabilidades relativas pode não ser válida para casos onde se tem  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \neq 0$ .

Ou seja, o caráter convectivo do fluxo pode não ser dado apenas por  $\frac{\partial k_r}{\partial x}$ . Sendo assim, recomendar-se-ia o uso do TVD no fluxo, como proposto inicialmente por Rubin e Blunt [37].

## CONCLUSÕES

---

O presente trabalho teve como objetivo principal estender o uso do esquema TVD de Rubin e Blunt para sistemas de coordenadas generalizadas. Foram resolvidos casos para validar esta metodologia e para comparar o desempenho do esquema TVD frente ao esquema upwind, tradicionalmente mais utilizado em simulação de reservatórios.

As seguintes conclusões podem ser tiradas a partir dos resultados apresentados neste trabalho:

- ☐ Os resultados dos casos destinados a validar o código computacional demonstram que a metodologia numérica empregada está correta e é confiável.
- ☐ Os resultados dos casos utilizados na comparação entre os esquemas TVD e upwind demonstram que o esquema TVD produz resultados com dispersão numérica substancialmente menor. Os resultados obtidos via TVD são equivalentes aos resultados obtidos utilizando interpolação upwind e malhas com três ou quatro vezes mais volumes. Estes resultados conferem com resultados já obtidos por alguns autores citados na Introdução.
- ☐ Para o mesmo número de volumes os tempos de CPU dos casos com interpolação TVD são de 5 a 30% superiores aos tempos de CPU obtidos com interpolação upwind. Entretanto como já citado anteriormente, os resultados dos casos TVD são equivalentes, e em alguns casos superiores, aos observados com interpolação upwind e malha mais refinada. Isto evidentemente traz uma grande economia de tempo de processamento.
- ☐ O efeito do refinamento de malha no deslocamento tipo pistão com altas razões de mobilidades, observado por Brand et al [13] , Fleming [53] e Palagi [51], também são observados neste trabalho. Porém, o uso do esquema TVD neste

tipo de escoamento parece aumentar a instabilidade da solução.

- A equação para o cálculo do raio equivalente de poço proposta neste trabalho é equivalente àquela apresentada por Cunha e Maliska [44], quando os volumes da malha utilizada possuem razões de aspecto próximos a um.
- A utilização do esquema TVD nas permeabilidades relativas em configurações com muitos poços e falha geológica produz resultados semelhantes àqueles em que se utilizou interpolação upwind.

## ***REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS***

---

1. ALLEN III, M. B., BEHIE, G. A. e TRANGENSTEIN, J. A., "*Multiphase Flow in Porous Media*", editado por C. A. Brebbia and S. Orsarg, Alemanha, 1988.
2. EWING, R., "*The Mathematics of Reservoir Simulation*", editado por R. E. Ewing, SIAM, pp. 3-34, Philadelphia, 1983.
3. COATS, K. H., "*Reservoir Simulation: State of Art*", J. of Pet. Tech., pp. 1633-42, Ago., 1982.
4. MUSKAT, M., "*The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*", J.W. Edwards Inc., Ann Arbor, MI, 1946.
5. \_\_\_\_\_, "*Physical Properties of Oil Production*", McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1949.
6. \_\_\_\_\_, "*The Production Histories of Production Gas-Drive Reservoirs*", J. Applied Phys. 16, 147, 1945.
7. KATZ, D. L., "*Methods of Estimating Oil and Gas Reserves*", Trans., ASME 118, pp.18-32, 1936.
8. BUCKLEY, S. E. e LEVERETT, M. C., "*Mechanism of Fluid Displacement in Sands*", Trans., AIME 146, pp. 107-117, 1942.
9. WELGE, H. J., "*A Simplified Method for Computing Oil Recoveries by Gas or Water Drive*", Tras., AIME 195, pp. 91-98, 1952.
10. ODEH, A. S., "*Reservoir Simulation - What's Is It?*", J. Pet. Tech., pp. 1383-88, Nov., 1969.

11. TODD, M. R., O'DELL, P. M., e HIRASAKI, G. T., *"Methods for Increasing Accuracy in Numerical Reservoir Simulators"*, Soc. Pet. Eng. J., pp.515-30, Dez., 1972.
12. COATS, K. H., GEORGE, W. D., CHU, C., e MARCUM, B. E., *"Three-Dimensional Simulation of Steamflooding"*, Soc. Pet. Eng. J., pp. 573-92, Dez., 1974.
13. BRAND, C. W., HEINEMANN, J. E e AZIZ, K., *"The Grid Orientation Effect in Reservoir Simulation"*, SPE 21228, Eleventh SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, pp. 17-20, Fev., 1991.
14. YANOSIK, J. L. e McCRACKEN, T. A., *"A Nine-Point Finite-Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Unfavorable Mobility Ratio Displacements"*, Soc. Pet. Eng. J., pp. 253-62., Fev, 1976.
15. HIRASAKI, G. J. e O'DELL, P. M., *"Representation of Reservoir Geometry for Numerical Simulation"*, Soc. Pet. Eng. J., pp. 393-94, Dez. 1970.
16. SONIER, F. e CHAUMET, P., *"A Fully Implicit Three Dimensional Model in Curvilinear Coordinates"*, Trans. SPE 253, pp. 361-70, 1974.
17. ROBERTSON, G. E. e WOO, P. T., *"Grid Orientation Effects and the Use of Orthogonal Curvilinear Coordinate in Reservoir Simulation"*, SPE 6100, apresentado no 51º Encontro Anual, Nova Orleans, 1976.
18. BRITTO, P. R. F., PEDROSA O. A., e HORNE, R., *"Application of Boundary-Fitted Curvilinear Grid to Reservoir Simulation"*, XI COBEM, pp. 129-31, São Paulo, 1991.
19. MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., CUNHA, A. R. e LIVRAMENTO M.A., *"Desenvolvimento de um Simulador 3D Black-Oil em Coordenadas Curvilíneas Generalizadas"*, Relatório preparado para o CENPES/PETROBRÁS S.A., parte II, Dezembro, 1993

20. CUNHA, A. R., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C. e LIVRAMENTO, M. A., *"Two-Dimensional Two-Phase Petroleum Reservoir Simulation Using Boundary-Fitted Grids"*, Submetido ao V ENCIT, São Paulo, 1994.
21. SHELDON, J. W., HARRIS, C. D. e BAVLY, D., *"A Method for General Reservoir Behavior Simulation on Digital Computers"*, SPE 1521-G, apres. no 35º Encontro Anual, pp. 2-5, Denver, 1960.
22. STONE, H. L. e GARDER, A. O. Jr, *"Analysis of Gas-Cap or Dissolved-Gas Drive Reservoirs"*, SPE J., Trans., AIME, 222, pp. 92-104, 1961.
23. FAGIN, R. G. e STEWART, C. H. Jr., *"A New Approach to the Two-Dimensional Multiphase Reservoir Simulator"*, SPE J., Trans., AIME, 237, pp. 175-82.
24. COATS, K. H., *"Reservoir Simulation: A General Model Formulation and Associated Physical/Numerical Sources of Instability"*, Boundary and Interior Layers - Computational and Asymptotic Methods, Editado por J. H. Miller, Boole Press, pp. 62-76, Dublin, 1980.
25. BLAIR, P. M. e WEINAUG, C. F., *"Solution of Two-Phase Flow Problems Using Implicit Difference Equations"*, SPE J., Trans., AIME, 246, pp. 417-24, 1969.
26. COATS, K. H., *"A Highly Implicit Steamflood Model"*, SPE J., pp. 369-83, Out., 1978.
27. ITO Y., *"The Evaluation of Interblock Mobility Using a Modified Midpoint Weighting Schemes"*, apres. no 6º Simpósio em Simulação de Reservatório - SPE, Fev. 1-3, Nova Orleans, 1982.
28. TAGGART, I. J. e PINCZEWSKI, W. V., *"The Use of Higher-Order Differencing Techniques in Reservoir Simulation"*, SPE Reservoir Engineering, pp. 360-72, Ago., 1987.



29. GODUNOV, S. K., *"A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics"*, Mat Sb 47 (1959), Traduzido pelo Dep. de Comércio dos EUA JPRS 7225, 1960.
30. TRANGENSTEIN, J. A., *"Multiphase Flow in Porous Media: Mechanics"*, Mathematics and Numerics Lecture Notes, Centro Científico da IBM, Bergen, Noruega, 1986.
31. ZALESAK, S., *"Fully Multidimensional Flux Corrected Transport Algorithms for Fluids"*, J. Comp. Physics, Vol. 31, p. 355, 1979.
32. HARTEN, A., LAX, P. D. e VAN LEER, B., *"On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws"*, SIAM Review, vol. 25, nº 1, Jan., 1983.
33. SWEBY, P. K., *"High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws"*, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 21, nº 5, Out., 1984.
34. VAN LEER, B., *"Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, II - Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme"*, J. Comp. Physics, 14, pp. 361-70, 1974.
35. LIU, J., *"Analysis of Reservoir Simulation Techniques for Enhanced Oil Recovery, Part II - Improved Difference Schemes for Reservoir Simulation"*, Seminário Interno, University of Texas, Austin, 1991.
36. YEE, H. C., HARTEN, A., *"Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates"*, AIAA Journal, Vol. 25, nº 2, pp. 266-74, Fev., 1987.
37. RUBIN, B. e BLUNT, M. J., *"Higher-Order Implicit Flux Limiting Schemes for Black-Oil Simulation"*, Proceedings of 11º SPE, pp. 17-20, Califórnia, Fev., 1991.

38. PINTO, A. C. C., "*Esquemas de Alta Resolução para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios*", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, São Paulo, Nov., 1991.
39. SCHWABE, K. e BRAND J., "*Prediction of Reservoir Behavior Using Numerical Simulators*", Paper 1857, apres. no 42º Encontro Anual da SPE-AIME, Texas, Out 1-4, 1967.
40. VAN POOLEN, H. K., BREITENBACH, E. A., e THURNAU, D. H., "*Treatment of Individual Wells and Grids in Reservoir Modeling*", SPE J., Trans., AIME, Vol. 243, pp. 341-46, Dez, 1968.
41. PEACEMAN, D. W., "*Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation*", Soc. Pet. Eng. J., pp. 183-94, 1978.
42. PEACEMAN, D. W., "*Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation with Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability*", Soc. Pet. Eng. J., pp. 531-543, 1983.
43. ABOU-KASSEM, J. H. e AZIZ, K., "*Analytical Well Models for Reservoir Simulation*", paper SPE 11719, apres. no Encontro Regional, Califórnia, 1983.
44. CUNHA, A. R. e MALISKA, C. R., "*Relatório de Estágio Curricular*", Eng. Mec. UFSC, Out-Dez, 1992.
45. PATANKAR, S. V., "*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*", Hemisphere Publishig Co., EUA, 1980.
46. SCHNEIDER, G. E. e ZEDAN, M., "*A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems*", Numerical Heat Transfer, Vol. 4 , pp. 1-19, 1981.

47. AZIZ, K. e SETTARI, A., *"Petroleum Reservoir Simulation"*, Applied Science Publishers, New York, 1983.
48. MALISKA, C. R., *"Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - Incluindo Coordenadas Generalizadas"*, Apostila, EMC-UFSC, Florianópolis, 1994.
49. CUNHA, A. R. e MALISKA, C. R., *"Relatório de Estágio Curricular"*, Eng. Mec. UFSC, Ago-Out, 1992.
50. PINTO, A. C. C., *"Comunicação Pessoal"*, 1993.
51. PALAGI, C., *"Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs"*, Tese de Doutorado, Stanford University, Stanford, Califórnia, maio, 1992.
52. WELGE, H. J., "A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive", Trans., AIME 195, pp 91-98, 1952.
53. FLEMING, G. C., *"Modeling the Performance of Fractured Wells in Pattern Floods Using Orthogonal Curvilinear Grids"*, paper SPE 16973 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, set. 27-30, 1987.

## APÊNDICE A

---

A aplicação das condições de contorno nos problemas com reservatórios selados é extremamente simples. Basicamente o que se faz é zerar os fluxos de massa nas faces dos volumes de controle que formam o contorno. Entretanto este procedimento exige que se tenha uma equação discretizada para cada contorno (contornos leste, oeste, sul e norte) e também uma equação para cada canto (canto nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste), além evidentemente, da equação para o interior do domínio. Portanto, deve-se ter nove equações diferentes para resolver o problema, o que, evidentemente, não é nada prático.

O tratamento computacional das falhas geológicas também é feito anulando-se o fluxo de massa através das interfaces que representam a falha. Este esquema exige que se tenha equações especiais para cada volume que faça parte da falha, semelhante ao procedimento usado para os volumes do contorno. Mesmo sendo este tratamento de simples aplicação, a implementação deste esquema no código computacional se torna complexa quando se tem várias falhas geológicas.

Para se evitar os problemas citados anteriormente este trabalho utilizou a proposta de Cunha e Maliska [49] para o tratamento das condições de contorno e das falhas geológicas. Este tratamento baseia-se no uso de coeficientes no cálculo dos gradientes de pressão. Desta maneira pode-se calcular os fluxos de massa para todo o domínio, inclusive os contornos, utilizando-se apenas uma equação.

A indexação dos coeficientes de falha em cada volume de controle é mostrada na Fig. 56. Os coeficientes  $f_{\xi_P}$  e  $f_{\eta_P}$  assumem valor nulo se não houver falha ou contorno selado, caso contrário, assumem valor unitário.

Assim para se avaliar as derivadas diretas na face "este", por exemplo, tem-se,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_e = F_{\xi_P} \frac{(P_E - P_P)}{\Delta \xi} \quad (162)$$

onde,

$$F\xi_P = 1 - f\xi_P \quad (163)$$

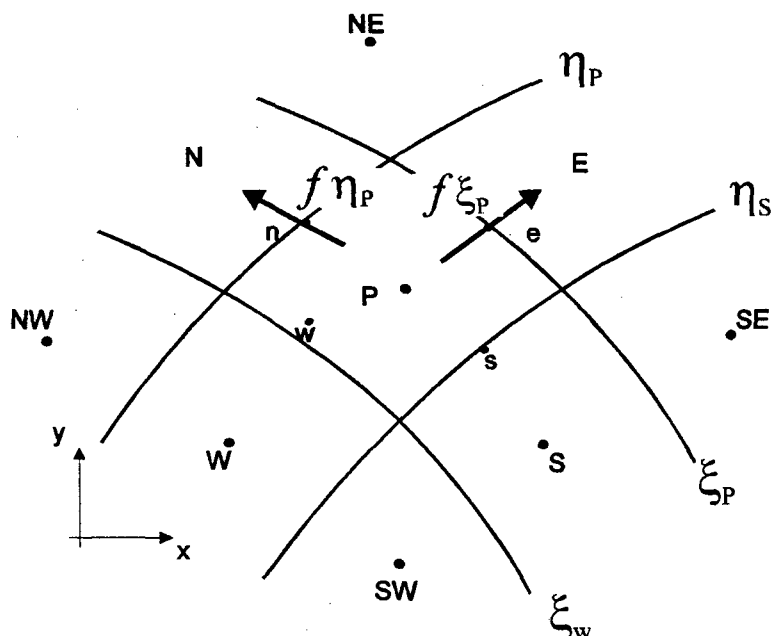


Figura 56 - Esquema de indexação de falhas geológicas

Portanto quando existir falha ou contorno selado na face "este" do V.C.,  $f\xi_P=1$  ,  $F\xi_P=0$  e  $\frac{\partial P}{\partial \xi}_e = 0$  ; zerando assim o fluxo de massa através desta interface . As outras derivadas diretas

são calculadas de maneira análoga e são mostradas no Capítulo Três.

Uma derivada cruzada na face "este" pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}_e = 0,5 \frac{\partial P}{\partial \eta}_e^+ + 0,5 \frac{\partial P}{\partial \eta}_e^- \quad (165)$$

onde os superíndices + e - representam respectivamente direita e esquerda da face "este". Caso não exista falha na face "este" ou em sua vizinhança tem-se,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e^+ = \frac{(P_{NE} - P_{SE})}{2 \Delta \eta} \quad (166)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e^- = \frac{(P_N - P_S)}{2 \Delta \eta} \quad (167)$$

Porém se existir uma falha na interface "s" do volume de controle P mostrado na Fig. 56, a derivada a esquerda teria que ser aproximada por,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e^- = \frac{(P_N - P_P)}{\Delta \eta} \quad (168)$$

Se além de uma falha na interface "s", também existir uma falha na interface "n", a derivada da Eq. (167) seria nula.

A expressão geral proposta por [49] para o gradiente  $0,5 \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e^-$  é dada por,

$$\begin{aligned} 0,5 \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e^- = 0,5 \left\{ (1-f_{\eta_S}) (1-f_{\eta_P}) \frac{(P_N - P_S)}{2 \Delta \eta} + f_{\eta_S} (1 - f_{\eta_P}) \frac{(P_N - P_P)}{\Delta \eta} + \right. \\ \left. + f_{\eta_P} (1 - f_{\eta_S}) \frac{(P_P - P_S)}{\Delta \eta} \right\} \end{aligned} \quad (170)$$

logo exemplificando, com uma falha em "s" tem-se  $f_{\xi_S}=1$ , e a Eq. (170) recupera a Eq. (168).

Reescrevendo a Eq. (170),

$$0,5 \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e^- = \frac{(CF\xi_N P_N + CF\xi_S P_S + CF\xi_P P_P)}{\Delta \eta} \quad (171)$$

onde,

$$CF\xi_N = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1-f\eta_S)(1-f\eta_P)}{2} + f\eta_S(1-f\eta_P) \right\} \quad (172)$$

$$CF\xi_S = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{(1-f\eta_S)(1-f\eta_P)}{2} + f\eta_P(1-f\eta_S) \right\} \quad (173)$$

$$CF\xi_P = -\frac{1}{2} \left\{ f\eta_S(1-f\eta_P) + f\eta_P(1-f\eta_S) \right\} \quad (174)$$

O gradiente  $\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e$  é calculado analogamente, e a expressão para Eq. (165) fica,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_e = \frac{F\xi_P}{\Delta \eta} & (CF\xi_N P_N + CF\xi_S P_S + CF\xi_P P_P \\ & + CF\xi P_{SE} + CF\xi_E P_E + CF\xi_{NE} P_{NE}) \end{aligned} \quad (176)$$